OSTWALD'S KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN.
Nr. 7.

UNTERSUCHUNGEN
ÜBER DIE
LÄNGE DES EINFACHEN SECUNDENPENDELS

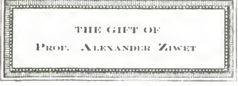
VON

F. W. BESSEL.

([illegible])

WILHELM ENGELMANN IN LEIPZIG.

. … ıchaften
in u… ıt wird,
nicht … ›reitung
der … Labora-
torie… ındenen
Einr… ltes der
Wiss… n hoch-
stehe… Mangel
hinw… ıftlichen
Ausl… ies das
Feh… gel an
Ken… ›n das
Geb…
… ker der
exa… ndlicher
Forn… dlungen
der … ıhrenden
und … ıusgeber
hofft… ches das
Einc… vertieft.
Dass… sser Be-
deut… icht nur
die l… getragen
habe… Keime,
die … enschaft
Arb… ırschöpf-
liche… en.



Die Klassiker der exakten Wissenschaften sollen ihrem Namen gemäss die rationellen Naturwissenschaften, von der Mathematik bis zur Physiologie umfassen und werden Abhandlungen aus den Gebieten der Mathematik, Astronomie, Physik, Chemie (einschliesslich Krystallkunde) und Physiologie enthalten.

Die allgemeine Redaktion führt **Dr. W. Ostwald,** o. Professor an der Universität Leipzig; die einzelnen Ausgaben werden durch hervorragende Vertreter der betreffenden Wissenschaften besorgt werden. Für die Leitung der einzelnen Abtheilungen sind gewonnen worden: für Astronomie Prof. Dr. Bruns (Leipzig), für Mathematik Prof. Dr. Wangerin (Halle), für Krystallkunde Prof. Dr. Groth (München), für Physiologie Dr. M. v. Frey (Leipzig), für Pflanzenphysiologie Prof. Dr. W. Pfeffer (Leipzig), für Physik Prof. Dr. Art… at).

…zung auf der dritten Seite des Umschlages.

Untersuchungen

über

die Länge des einfachen Secundenpendels

von

F. W. BESSEL.

Herausgegeben

von

H. Bruns.

Mit 2 Tafeln.

LEIPZIG
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN
1889.

Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels

von

F. W. Bessel.

Aus: »Abhandlungen der mathematischen Klasse der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.« Aus dem Jahre 1826.

Erster Abschnitt.

Bestimmung der Länge des einfachen Secundenpendels für die Königsberger Sternwarte.

1.

Die Bestimmung, welche ich hier mittheilen werde, ist auf einen Apparat gegründet, bei dessen Einrichtung ich beabsichtigte, sowohl jede über den Mittelpunkt der Bewegung des Pendels mögliche Unsicherheit, als jeden Fehler in der Messung der Länge desselben zu vermeiden. Dieses habe ich dadurch erlangt, dass ich nicht Schwingungszeit und Länge Eines Pendels, sondern die Schwingungszeiten zweier Pendel beobachtet habe, deren Längenunterschied nicht sowohl gemessen, als vielmehr der ganzen *Toise du Pérou* gleichgemacht wurde.

Die Einrichtung ist im Wesentlichen folgende: an einer lothrechten eisernen Stange ist eine einige Linien grosse wagerechte Ebene unwandelbar befestigt, auf welche die Toise mit einem ihrer Enden lothrecht gestellt werden kann; ferner ist eine Einrichtung vorhanden, von welcher das, aus einer Kugel an einem Faden bestehende Pendel herabhängt, und welche entweder auf der erwähnten festen Ebene, oder auf dem oberen Ende der auf dieselbe gestellten Toise ihren Ruhepunkt hat, so

dass der Anfangspunkt des Pendels, in beiden Fällen, einen Höhenunterschied erhält, welcher der Länge der Toise genau gleich ist; endlich ist am unteren Ende der eisernen Stange eine Mikrometerschraube, durch welche kleine Unterschiede in der Höhe der herabhängenden Kugel gemessen werden können. Die Bestimmung der Pendellänge wird dadurch erlangt, dass man die Schwingungszeiten der an zwei verschiedenen Fäden befestigten Kugel beobachtet, [2] deren Länge so nahe um eine Toise verschieden ist, dass der Höhenunterschied der Kugel an beiden Pendeln, nämlich an dem kürzeren wenn es von der festen Ebene, und an dem längeren wenn es von der oberen Fläche der Toise herabhängt, durch die Mikrometerschraube gemessen werden kann. Diese Schwingungszeiten zweier Pendel, deren Längen selbst unbekannt sind, deren Längenunterschied aber bekannt ist, sind offenbar hinreichend zur Bestimmung der Länge des einfachen Secundenpendels.

Diese Idee der anzuwendenden Methode, und die Art wie sie, meiner Meinung nach, so ausgeführt werden konnte, dass die Genauigkeit des Resultats nicht von dem Apparate, sondern allein von dem Fleisse, welchen man auf die Beobachtungen und ihre Wiederholung verwendet, begrenzt wird, theilte ich im Anfange des Jahres 1823 Herrn *Repsold* in Hamburg mit; dieser grosse Künstler hatte die Güte, auf meine Vorschläge einzugehen, und einen Apparat auszuführen, welcher in allen seinen Theilen die Vollendung der Einrichtung und Arbeit besitzt, welche eines solchen Meisters würdig sind. Im Anfange von 1825 wurde das Instrument fertig, und ich nahm es, vor seiner Absendung nach Königsberg, in der Werkstatt des Künstlers selbst in Empfang. Zugleich erhielt ich eine Toise von Herrn *Fortin* in Paris, deren Bestellung Herr *Arago* gütigst übernommen hatte, und für deren sorgfältige Vergleichung mit dem Originale der *Toise du Pérou*, ich diesem grossen Physiker und Astronomen, so wie Herrn Lieutenant *Zahrtmann*, welcher sich, in Angelegenheit der grossen *Schumacher*'schen Vermessungen, in Paris befand, dankbar verpflichtet bin. Im August 1825 langte alles hier an und ich fing bald darauf die Versuche an, von welchen ich im Laufe dieser Abhandlung Rechenschaft geben werde.

2.

Zuerst werde ich den Apparat beschreiben. Die perspectivische Abbildung und der daneben befindliche Aufriss, deren Zeichnungen ich Herrn Hafenbau-Inspector *Hagen* verdanke, stellen das ganze so deutlich dar, dass ich nicht zweifle, es vollständig erklären zu können.

Der Apparat ist an einem Gebälke von Mahagoniholz *a a a a* aufgestellt, welches im nördlichen Zimmer der Sternwarte, an der Mauer, welche dieses von dem südlichen trennt, befestigt ist; es ist nämlich in dieser Mauer, [3] etwa 7 Zoll über dem Fussboden, ein starkes (in der Zeichnung nicht sichtbares) Eisen befestigt, auf welchem das untere Querholz des Gebälkes ruht; zwei andere Eisen *b b*, am oberen Ende, in der Mauer befestigt, welche vorn hakenförmig gekrümmt sind, dienen zur Befestigung des Gebälks, und durch Keile, welche zwischen ihnen und dem Gebälke eingeschoben sind, wird das letztere lothrecht gerichtet. Auf diese Art ist also das Gebälk, und damit der daran aufgehängte Apparat, von dem Fussboden getrennt. In dem oberen Querholze dieses Gebälks ist ein Bolzen *c* befindlich, auf welchem die 10 Fuss 2 Zoll lange, 4 Zoll breite und 4 Linien dicke eiserne Stange *d d* aufgehängt ist; um sie genau lothrecht zu stellen dienen das Loth *f f* und die Schrauben *g g*, *h h*, so wie drei Paare anderer Schrauben, welche sich in den Querhölzern des Gebälks befinden, und von der Rückseite desselben, mittelst eines Schlüssels, gedreht werden, aber in der Zeichnung nicht sichtbar sind.

An der grossen eisernen Stange befindet sich der lothrechte stählerne Cylinder *i*, dessen beide Enden kegelförmig sind; mit dem unteren, welches abgerundet ist, ruht er auf einem an der Stange festen Ansatze; das obere Ende ist, senkrecht auf die Axe des Cylinders, abgeschnitten, und bildet eine kreisförmige, polirte Ebene von 3 Linien Durchmesser, welche, nach einem Herrn *Repsold* eigenthümlichen Verfahren, ihre auf der Ebene der grossen Stange senkrechte Stellung mit der grössten Schärfe erhalten hat.

Auf diese Ebene kann die Toise *k k* gestellt werden, und wird dann durch schwache Federn *m m* aufrecht erhalten; jedoch ist eine Hülse *n* in der Mitte derselben festgeklemmt, unter welche zwei, um die Unterlagen *o o* bewegliche Hebel greifen, an deren anderen Armen so schwere Gewichte wirken, dass sie die Toise genau tragen. Durch diese Einrichtung ist die Ver-

kürzung der Länge aufgehoben worden, welche die Toise erfahren würde, wenn man sie aus der wagrechten Lage, in welcher sie mit ihrem Originale verglichen worden ist, brächte und anf eins ihrer Enden stellte: die obere Hälfte verkürzt sich nämlich um dieselbe Qnantität, nm welche die untere sich verlängert.

Die Toise schwebt also frei, und erlangt eine feste Stellnng auf dem Cylinder *i* nur dnrch das Uebergewicht welches sie, bei dem Gebranche des längeren Pendels, dadurch erhält, dass der Apparat *p*, von welchem dieses herabhängt, anf ihrem oberen Ende rnht. Dieser Apparat, welchen ich den [**4**] Aufhängungsrahmen des Pendels nennen werde, ist anf der zweiten Kupfertafel Fig. 1 grösser dargestellt. An der rechten Seite der grossen eisernen Stange, in der Höhe sowohl des unteren, als des oberen Endes der Toise, sind zwei Paare von Lagern *qq* angebracht, den Lagern eines Mittagsfernrohrs ähnlich; auf diese werden Cylinder von gehärtetem Stahl, von 1 Zoll Durchmesser, gelegt, so dass ihre Axen senkrecht auf die Ebene der grossen Stange gerichtet sind, nnd mittelst einer Wasserwage und einer an dem vorderen Lager befindlichen Schranbenbewegnng, genau horizontal gestellt werden. Bei den Versuchen mit dem längeren Pendel wird der Anfhängnngsrahmen, mit den umgekehrten, daran befindlichen Lagern, auf den oberen Cylinder gelegt, bei den Versuchen mit dem kürzeren Pendel auf den unteren. In dem letzteren Falle wird die Toise etwa einen Zoll in die Höhe geschoben, damit die horizontale Ebene des Cylinders *i* von derselben frei werde; dieses geschieht leicht und sicher, da die Toise von ihren Gegengewichten getragen wird.

Der Anfhängungsrahmen besteht, wie Fig. 1 Taf. II. dentlich macht, ans einem eisernen Rahmen, unter dessen, den Lagern entgegengesetztem Ende, ein Cylinder von Stahl befestigt ist, welcher durch Fig. 3, in seiner wahren Grösse, besonders dargestellt wird. Dieser Cylinder hat an dem hinteren, der grossen Stange zngewandten Ende, eine Kugel, von welcher zwei Segmente, senkrecht anf die Axe des Cylinders, abgeschnitten sind; an dem vorderen hat er einen kleineren Cylinder von 0,996 Linien Durchmesser, welchen ich den Abwickelnngscylinder nennen werde; dieselbe Benennnng werde ich anch dem ganzen Cylinder mit der Kugel, wovon der eigentliche Abwickelnngscylinder nnr ein Theil ist, beilegen. An dem, an den Anfhängungsrahmen befindlichen, schräg aufwärts gehenden Stücke, wird der Pendelfaden festgeklemmt, dann über den Abwickelnngscylinder geführt und nun durch die Kngel des Pendels

gespannt. Sobald diese Kugel angehängt ist, zieht ihr Gewicht den Aufhängungsrahmen vorn herab, so dass die Kugel am hinteren Ende des Abwickelungscylinder, bei den Versuchen mit dem langen Pendel auf die Mitte der oberen Fläche der Toise drückt und dieser die feste Stellung auf der wagrechten Ebene des Cylinders *i* giebt, wozu auch die Reibung der Hebel an ihren Ruhepunkten *oo* beiträgt; bei den Versuchen mit dem kurzen Pendel drückt diese Kugel auf die wagrechte Ebene des Cylinders *i* selbst. Das Gegengewicht an den Aufhängungsrahmen, [5] welches die Zeichnung darstellt, ist so geschoben, dass der Druck etwa 12 Unzen beträgt.

Bei den Versuchen werden die auf den Lagern *qq* liegenden Cylinder nivellirt; indem sie dadurch horizontal werden, wird auch die Axe des Abwickelungscylinders entweder horizontal, oder sie macht wenigstens mit dem Horizonte stets denselben Winkel. Hieraus geht hervor, dass der Höhenunterschied des Anfangspunkt zweier Pendel, die der Temperatur des Versuchs zugehörige Länge der Toise ist. Man bemerkt leicht, dass die Construction des Abwickelungscylinders, welcher am hinteren Ende eine Kugel hat, die Untersuchung ob die beiden Lager *qq* genau eine Toise voneinander entfernt sind, unnöthig macht; doch hat Herr *Repsold* dafür gesorgt, dass die Axe, um welche der Aufhängungsrahmen sich dreht und die Axe des Abwickelungscylinders, bei dem Gebrauche beider Pendel, sich in einer Horizontalebene befinden, wodurch auch die strenge Richtigkeit des Parallelismus beider Axen unnöthig wird. Ich erwähne dieses, nicht weil ich glaubte, dass die Construction hier weniger vollkommen wäre als in ihren übrigen Theilen, sondern nur um dadurch bemerklich zu machen, dass die Anbringung eines besonderen Prüfungsmittels für den Parallelismus beider Axen überflüssig gewesen sein würde.

Die auf diese Art aufgehängten Pendel beschreiben keine Kreise, sondern die Curve, deren Evolute der Kreis ist.

Um den Höhenunterschied der Kugel in beiden zusammengehörigen Versuchen zu messen, ist an dem unteren Ende der grossen eisernen Stange die Vorrichtung *r* befindlich. Sie besteht aus einem Hohlcylinder von Glockenmetall, am Eisen der Stange befestigt, in welchem sich ein Cylinder von Stahl, von 7 Linien Durchmesser, auf und abwärts schieben, und auch um seine Axe drehen lässt; von diesem Cylinder ist ein kleines Stück am oberen Ende in der Zeichnung sichtbar. Unter das untere Ende dieses Cylinders wirkt die Schraube *s*, so dass er,

durch Drehung derselben, erhöht und erniedrigt, nnd die Quantität dieser Veränderungen durch die Revolutionen dieser Schraube gemessen werden kann. Das obere Ende des Cylinders wird indessen nicht nnmittelbar mit der Kugel in Berührung gebracht, sondern es ist darauf ein sechzig Mal vergrössernder doppelter Fühlhebel *t* befestigt, dessen kürzerer Arm eine horizontale polirte Stahlebene trägt. Die Schraube *s* wird so weit gedreht, bis die die Kugel berührende Stahlebene [6] am kurzen Arme des Fühlhebels, den längeren bis zu einem Zeichen an seinem Gehäuse erhebt; hierdnrch kann man die Höhenunterschiede der Kugel genauer beobachten, als ohne Fühlhebel möglich sein würde.

Da es wesentlich ist, zufällige Veränderungen der Temperatur von dem Apparate zu entfernen, so ist derselbe in ein Gehäuse mit Spiegelplatten eingeschlossen, und man dreht die Schraube *s* nicht nnmittelbar, sondern bei verschlossenen Fenstern, mittelst der Handhabe *u*, welche durch ein Stirnrad auf die Schraube wirkt. Auch wird das Pendel bei verschlossenem Gehäuse sowohl in Bewegung gesetzt als angehalten; dieses geschieht durch die Zange *v*, welche sich vor und rückwärts schieben lässt, und durch welche man also das Pendel beliebig weit von der Lothlinie entfernen kann, ehe man es seiner Bewegung überlässt. In *w* ist eine Scale, welche die Schwingungsweiten misst. In das Eisen der grossen Stange eingelassen sind die Kugeln der Thermometer e', e'', e'''; zwei andere Thermometer l' und l''' hängen frei im Gehäuse und zeigen die Temperatur der Luft; das erstere, dessen Kugel sich in der Höhe der Pendelkugel befindet, bleibt immer an seinem Orte, das letztere hat seine Kngel stets in der Höhe des Aufhängepnnkts der Pendel und befindet sich also an dem in der Zeichnung angegebenen Orte, wenn mit dem langen Pendel experimentirt wird; wird aber das kurze Pendel angewandt, so wird das Thermometer so tief gehängt als dann erforderlich ist. In dieser Lage bezeichne ich dasselbe Thermometer durch l''.

Endlich erwähne ich noch, dass sowohl das Gebälk von Mahagoniholz, als auch die grosse eiserne Stange, so eingerichtet sind, dass sie, des leichten Transports wegen, in der Mitte auseinander genommen werden können. Dazu dienen, für das Gebälk, die in der Zeichnung sichtbaren Schrauben *x x x x*; die Zusammensetzungsart der Stange, welche eben so sicher als kunstreich ist, konnte in der Zeichnung nicht angegeben werden.

3.

In dieser Beschreibung habe ich, um die Uebersicht des ganzen Apparats nicht zu erschweren, die Anführung aller Einzelheiten vermieden, werde aber, so wie ihre Kenntniss nothwendig wird, darauf zurückkommen. Auch habe ich bei keinem der Theile der Vollendung erwähnt, welche alle [7] besitzen. Dieses ist bei einer Arbeit von *Repsold* unnöthig, allein ich kann dennoch nicht verschweigen, dass die genaue Untersuchung des Apparats, sowohl meinem hochgeehrten Freunde *Schumacher*, als mir selbst, die Bewunderung abgenöthigt hat, welche wahrer Vollendung gebührt.

Ich kann indessen nicht unterlassen, von der Mikrometer-Vorrichtung am unteren Ende des Apparats noch einiges zu sagen, indem die mehr oder weniger gute Ausführung dieses Theils, unmittelbaren Einfluss auf die Messungen der Höhenunterschiede hat. Der Cylinder nämlich, welcher sich in der Hülse von Glockenmetall bewegt, füllt den Raum dieser letzten so genau aus, dass, wenn man diese Hülse unten luftdicht verschliesst, vorher aber den Cylinder etwas in die Höhe hebt, derselbe auf der in der Hülse befindlichen Luft ruht, dennoch aber Spielraum genug hat, um eine Axendrehung welche man ihm giebt (nachdem der Fühlhebel, welcher der Drehung im Wege sein würde, abgeschraubt worden ist) mehrere Minuten lang fortzusetzen. Dabei sind der Cylinder und seine Hülse vollkommen trocken, ohne Oel, so dass die Bewegung des ersteren, bei den Messungen der Pendel, auch nicht durch die Klebrigkeit des Oels gestört werden kann, und er in der That der kleinsten Drehung der Schraube welche ihn trägt, nachgiebt. Durch diese fast völlige Gleichheit der Durchmesser des Cylinders und seiner Hülse, erhält man die Versicherung, dass die erstere, bei der Erhöhung und Erniedrigung sich parallel bleibt; dieses wird bestätigt wenn man auf das Gehäuse des Fühlhebels eine Wasserwage setzt, welche ihren Stand nicht verändert, wenn man den Cylinder erhöht oder erniedrigt. Die dagegen stattfindende Beschränkung des Gebrauchs des Apparats auf Temperaturen, welche nicht niedriger sind als einige Grade unter dem Gefrierpunkte, ist unbedeutend; die grössere Zusammenziehung des Glockenmetalls durch die Kälte vernichtet nämlich den kleinen Zwischenraum dann ganz, und der Cylinder verliert seine Beweglichkeit.

Ein anderer Punkt von unmittelbarem Einflusse auf die

Resultate ist die Unbeweglichkeit des Aufhängungsrahmens während der Schwingungen. Um diese zu prüfen, habe ich das kleine, von Herrn *Hardy* erfundene Instrument, welches auch Herr *Kater* zu demselben Zwecke angewandt hat, nachdem es vorher den Pendelschwingungen gleichzeitig gemacht war, sowohl bei dem langen, als bei dem kurzen Pendel, auf den Aufhängungsrahmen gestellt, aber keine Bewegung bemerkt. Um aber eine noch directere [8] Prüfung der Richtigkeit der Versuche in dieser Hinsicht zu erhalten, habe ich den Rahmen, nahe an dem Punkte von welchem das Pendel herabhängt, durch mehrere stark angespannte Fäden, auf das stärkste befestigt und das Pendel schwingen lassen, dann diese Befestigung weggenommen und die Schwingungen des Pendels fortgesetzt; beide Reihen von Versuchen haben aber, weder bei dem langen, noch bei dem kurzen Pendel, einen Unterschied gezeigt. Uebrigens wäre bei einem Apparate von meiner Einrichtung die absolute Unbeweglichkeit des Aufhängepunkts vielleicht weniger wesentlich, als bei einem anderen, indem der Einfluss einer kleinen Bewegung auf die Längen beider Pendel wahrscheinlich gleich sein, und dann aus dem Unterschiede, worauf es allein ankommt, verschwinden würde.

4.

Ich werde jetzt das Pendel selbst näher beschreiben. Der Stahlfaden, welcher die Kugel trägt, ist nicht selbst in Berührung mit dem Abwickelungscylinder, sondern es ist an dem Aufhängungsrahmen ein 1,4 Linie breites, etwa 0,008 Linie dickes Messingblättchen festgemacht*), welches über den Abwickelungscylinder gelegt ist und einige Linien unter demselben eine Klemme von Messing trägt, welche 20,77 Gran des Preussischen Pfundes wiegt. Der Pendelfaden ist an beiden Enden in kleine Schraubenklemmen befestigt, welche dem Gewichte nach vollkommen gleich sind, jede 19,72 Gran schwer. Von diesen Klemmen wird eine in die mit einer Schraubenmutter versehene Klemme am Messingblättchen, die andere in eine gleiche in die Kugel eingebohrte Schraubenmutter eingeschraubt, durch welche Einrichtung man auch in den Stand gesetzt wird, den Faden leicht

*) Ein Quadratzoll desselben wiegt 1,801 Gran, also eine Linie der Länge eines Streifens von 1,4 Linie Breite 0,01759 Gran.

umzukehren. Endlich ist ein 2 Linien hoher und 1,25 Linien Durchmesser habender, in der Axe durchbohrter Cylinder von Messing, der für das lange Pendel 3,81 Gran, und für das kurze 3,69 Gran wiegt, auf den Faden geschoben; dieser ist erforderlich um die Beobachtung der Schwingungszeiten genau zu machen, wie aus der unten vorkommenden Beschreibung der Beobachtungsart hervorgehen wird; ich werde ihn den Coincidenzcylinder nennen. Die [9] zweite Figur Taf. II zeigt alles dieses in wahrer Grösse; die erste macht die Befestigung des Messingblättchens anschaulich.

Wenn das Messingblättchen vollkommen biegsam wäre, so würde der Mittelpunkt der Kugel einen Bogen der Curve beschreiben, deren Evolute der Durchschnittskreis des Abwickelungscylinders (Durchmesser = $0,^{L}996$) ist. Es lässt sich leicht zeigen (Beilage I), dass die Zeit einer ganzen Schwingung in dieser Curve, von derjenigen Zeit nicht merklich verschieden ist, in welcher ein einfaches Pendel eine Schwingung machen würde, dessen Länge der Länge des sich abwickelnden Pendels im Zustande der Ruhe, oder der mittleren Länge desselben gleich ist. Wenn man aber die Federkraft des Fadens nicht ausser Acht lässt, so wird klar, dass derselbe zwischen dem Abwickelungscylinder und der Kugel keine gerade Linie, sondern in der Nähe des ersteren gekrümmt ist, welche Krümmung aber mit der wachsenden Entfernung vom Abwickelungscylinder geringer, und sehr bald unmerklich wird. Man kann nicht daran zweifeln, dass diese Federkraft einen Einfluss auf die Schwingungszeit des Pendels haben müsse, allein da die Krümmung nur ganz nahe am Abwickelungscylinder merklich ist, so ist zu erwarten, dass sie nur den Mittelpunkt der Bewegung ändert, entweder um eine beständige, oder mit dem Schwingungswinkel veränderliche, nicht aber von der Länge des Pendels abhängige Quantität.

Da aber die gegenwärtige Methode nicht auf die Länge eines Pendels, sondern auf den Längenunterschied zweier Pendel gegründet ist, und daher alles was beide gleichmässig ändert, keinen Einfluss auf das Resultat hat, so wird auch die Federkraft des Fadens unschädlich, falls man die Ueberzeugung erlangen kann, dass sie für beide Pendelfäden, oder vielmehr für die Theile derselben, welche sich in der Nähe des Abwickelungscylinders und in Berührung mit demselben befinden, genau gleich ist, und falls man beide Pendel in gleichen Schwingungswinkeln beobachtet. Die erste dieser Bedingungen ist durch die Einrichtung des oberen Theils der Pendel, welcher für beide derselbe

bleibt und daher die Gleichheit der Federkraft vollkommen verbürgt, erfüllt worden; die andere ist dadurch erfüllt, dass die Versuche mit beiden Pendeln bei gleichen Winkeln gemacht sind.

Die Veränderung der Bewegung, welche aus der Federkraft entsteht, habe ich (Beilage II) durch Rechnung verfolgt, vorzüglich um kennen zu lernen, welchen Einfluss die Schwingungswinkel darauf haben; denn wenn [10] ein solcher Einfluss merklich ist, und man darauf ausgeht, alle bei einem Versuche beobachteten Coincidenzen des Pendels und der Uhr, durch eine und dieselbe Formel möglichst nahe darzustellen, wie es geschehen muss wenn man den grössten Vortheil aus den Beobachtungen ziehen will, so wird auch der Einfluss der Federkraft in der Reductionsformel auf unendlich kleine Winkel nicht fehlen dürfen. Ich habe gefunden, dass wenn die Tiefe der als ein Punkt betrachteten Kugel unter der Axe des Abwickelungscylinders, im Zustande der Ruhe, durch ϱ bezeichnet wird, das Pendel in derselben Zeit schwingt, in welcher ein einfaches schwingen würde, dessen Länge

$$= \varrho + 11\left(1 - \sqrt{\left(1 - \frac{\mu}{4aa}\right)}\right)\sqrt{\mu} \, . \sin\frac{1}{2}u'^2$$

ist. In dieser Formel bedeutet μ die elastische Kraft des Fadens, die Kraft welche den Faden spannt als Einheit angenommen, a den Halbmesser des Abwickelungscylinders und u' den Schwingungswinkel. Sie setzt einen wenig steifen Faden voraus, so dass derselbe auf einem Bogen des Abwickelungscylinders ganz aufliegt; wird er steifer angenommen, so dass er den Cylinder nur in einem Punkte berührt, so wird diese Formel

$$= \varrho + \frac{a}{2}\sin\frac{\omega'}{2} - \frac{\sqrt{\mu}}{2}\cos\frac{\omega'}{4}$$
$$+ \left\{\frac{3}{16}a\sin\frac{\omega'}{2} + \sqrt{\mu}\left(11 - \frac{735}{64}\cos\frac{\omega'}{4}\right)\right\}\sin\frac{1}{2}u'^2,$$

wo ω' den Winkel bezeichnet, welchen der Theil des Fadens über dem Abwickelungscylinder, mit der Lothlinie macht; bei meinem Apparate ist ω' etwa $= 19^\circ$. Es ist noch ein dritter Fall möglich, nämlich wo die beiden vorigen, während der Schwingung, ineinander übergehen; ich habe aber die Rechnung nicht auf ihn ausgedehnt.

Das Messingblättchen, welches ich angewandt habe, hat so wenig Federkraft, dass bei meinem Versuchen der erste Fall

stattfindet, und sogar eine Krümmung desselben, da wo es den Abwickelungscylinder verlässt, nicht auffallend ist. Es war meine Absicht, ans der Vergleichung der bei grösseren und kleineren Schwingungswinkeln beobachteten Coincidenzen, μ abzuleiten, und es dann bei der Reduction zu berücksichtigen, so wie auch die aus der Dehnbarkeit des Fadens hervorgehende, von den Herren *Paoli* und *Poisson* untersuchte, gleichfalls dem Quadrate des [11] Schwingungswinkels proportionale Aenderung. Allein theils stimmen meine Beobachtungen, ohne Berücksichtigung dieser Verbesserungen, so nahe mit der gewöhnlichen Reductionsformel überein, dass das etwa daran fehlende sich fast ganz nnter den zufälligen Fehlern versteckt hat, und daher die Uebereinstimmung der einzelnen Coincidenzen einer Beobachtungsreihe, durch seine Berücksichtigung nicht merklich vermehrt wird; theils hat sich später gefunden, dass auch die Luft in welcher das Pendel sich bewegt, auf die Reductionsformel einen Einfluss haben kann, so dass beide Ursachen vermischt erscheinen und daher der Einfluss, welchen die Beobachtungen etwa verrathen möchten, nicht einer allein zugeschrieben werden darf. Die nahe Uebereinstimmung der Beobachtungen mit der, alles dieses nicht berücksichtigenden Reductionsformel, zeigt übrigens, dass die Gleichheit der Schwingungswinkel beider Pendel, nicht gar zu ängstlich gefordert werden darf.

Trotz dem Resultate der Rechnung in der II. Beilage, darf diese Aufhängnngsart des Pendels in einem Falle nicht angewandt werden, wo es auf die absolute Länge desselben ankömmt. Denn theils berücksichtigt die Rechnung die Dicke des Fadens nicht, theils möchte es schwer sein, die Ueberzeugung zu erlangen, dass nicht zwischen dem Cylinder und dem Faden (Messingblättchen) eine kleine Anziehung stattfindet. Allein auf den Unterschied zweier Pendellängen hat alles dieses keinen Einfluss, und daher wählte ich diese Aufhängungsart als die einfachste. Später wurde eine Aenderung am Aufhängungsrahmen angebracht, so dass auch mit anderen Aufhängungsarten Versuche gemacht werden konnten; hierauf werde ich unten zurückkommen.

5.

Die Beobachtungsart der Schwingungszeit eines Pendels durch Coincidenzen, welche, so viel ich weiss, *Borda* erfunden hat, ist jeder anderen so weit vorzuziehen, dass es sich von

selbst versteht, dass ich sie angewandt habe; doch werde ich die Art wie dieses geschehen ist auseinandersetzen müssen.

Es war dabei die Absicht, jeden gegenseitigen Einfluss der Bewegungen des Pendels der Uhr und des Pendels am Apparate zu vermeiden, wie dieses auch schon Herr *Carlini* gethan hat. Dieses erlangte ich dadurch, dass ich die Uhr nicht nahe vor oder hinter dem Apparate aufstellte, sondern in einer Entfernung von 8 Fuss 6,65 Zoll vor dem schwingenden Pendel; [**12**] zwischen beide wurde ein Kometensucher von *Fraunhofer* von 24,36 Zoll Brennweite, aus welchem die Oculare herausgenommen waren, gestellt; das Objectiv desselben war 39,77 Zoll vom Pendel am Apparate und 62,88 Zoll von dem der Uhr entfernt, so dass das Bild des ersteren genau auf das Uhrpendel fiel, und beide durch ein etwa 15 Fuss entferntes, 30zölliges Fernrohr von *Fraunhofer*, völlig deutlich erschienen.

An der Scale des Pendelapparats (*w*) ist ein schwarzer Streifen, in horizontaler Richtung befestigt, in dessen Mitte eine 0,5 Linie breite Stelle weiss gelassen ist, diese wird, wenn das Pendel in Ruhe ist, von dem Faden desselben genau bissectirt, und, wenn dem im vorigen Art. erwähnten Coincidenzcylinder die gehörige Stelle auf dem Faden gegeben wird, von diesem völlig verdeckt. An dem untersten Ende des Uhrpendels dagegen befindet sich ein geschwärztes Stück Papier, in welches ein etwa 0,3 Linie breites Loch eingeschnitten ist, welches, wenn das Uhrpendel in Ruhe ist, mit dem Bilde der weissen Stelle auf dem schwarzen Streifen, genau zusammenfällt. Es geht hieraus hervor, dass im Zustande der Ruhe beider Pendel, durch das Fernrohr gesehen, der Coincidenzcylinder durch das Loch am Uhrpendel sichtbar wird, dass er aber die weiss gelassene Stelle auf dem schwarzen Streifen verdeckt, so dass diese nicht gesehen wird, und alles schwarz erscheint, da auch der Coincidenzcylinder geschwärzt ist. Im Zustande der Bewegung beider Pendel aber, wird die weiss gelassene Stelle bei jedem Schlage der Uhr sichtbar, ausser wenn beide Pendel in demselben Momente vorübergehen und daher der Coincidenzcylinder sie verdeckt. Die Breiten der weissen Stelle am Apparate und des Lochs am Uhrpendel, sind so gewählt, dass auch am Anfange der Versuche, wenn die Geschwindigkeit am grössten ist, die erstere ganz unsichtbar wird; es sind daher immer die Zeiten der Verschwindung und Wiedererscheinung des Weissen beobachtet, die eine bei der Bewegung des Pendels von der Rechten zur Linken, die andere bei der entgegengesetzten; das Mittel

aus beiden, welches das bei den Versuchen mit dem kurzen Pendel angegebene Moment ist, fällt daher nie auf eine ganze, sondern immer auf eine halbe Secunde der Uhr. Die Deutlichkeit, womit das durch das Objectivglas des Kometensuchers gemachte Bild und das Pendel der Uhr durch das Fernrohr gesehen werden, erlaubt die Coincidenzen auch bei kleinen Schwingungen etwa eben so genau zu beobachten, wie bei grösseren.

[13] Die Schwingungszeit des langen Pendels könnte auf dieselbe Art beobachtet werden wie die des kurzen, wenn man eine Uhr besässe, deren Schläge nahe dieselbe Dauer hätten; allein das Pendel derselben, auf gewöhnliche Art eingerichtet, müsste etwa 10 Fuss lang sein, was Unbequemlichkeiten und Schwierigkeiten herbeiführen würde. Ich versuchte daher, die Uhr mit einem Pendel von einer neuen Construction zu versehen, welches nicht länger ist als ein gewöhnliches Uhrpendel: es ist dasselbe aus einer Eisenstange und aus einer Messingstange zusammengesetzt, deren erstere sich über dem Aufhängepunkte, die andere darunter, befindet; beiden sind solche Dimensionen und Massen gegeben, dass das Pendel nicht nur in der erforderlichen Zeit (1,72) schwingt, sondern auch die Einwirkungen der Wärme und Kälte compensirt. Allein ich war gezwungen, diesen Versuch aufzugeben, indem der Gang der Uhr zu unregelmässig wurde, was ich, wenigstens zum Theil, den Aenderungen der Wärmeverschiedenheit oben und unten am Pendel, gegen welche diese Constructionsart sehr empfindlich ist, zuschreibe. Indessen ist dieses oder ein ähnliches Hülfsmittel nicht eigentlich nothwendig, denn die Bestimmtheit und Deutlichkeit womit die Coincidenzen, bei der beschriebenen Beobachtungsart sich zeigen, ist hinreichend zur Beobachtung nicht allein derjenigen, welche im Falle der nahen Gleichheit der Schwingungszeiten, durch allmählige Annäherung der Durchgangszeiten beider Pendel durch die Lothlinie entstehen, sondern auch derjenigen, welche sich, im Falle beide Pendel ganz verschiedene Bewegungen haben, zutragen ohne vorher erwartet zu sein. Auf diese Art wurden die Coincidenzen beider Pendel an einer und derselben Uhr beobachtet.

Man bemerkt indessen leicht einen wesentlichen Unterschied zwischen beiden Methoden: bei der ersteren beobachtet man beide Grenzen der Verdeckung des Weissen und setzt die wahre Coincidenz in die Mitte derselben; bei der anderen nimmt man jeden, innerhalb dieser Grenzen gelegenen Punkt für die Mitte an. Es ist daher klar, dass die erste Beobachtungsart jede einzelne

Coincidenz genauer giebt als die zweite; allein, wenn man bei der letzteren mehre aufeinanderfolgende Coincidenzen beobachtet, und aus allen das Mittel nimmt, so ist im Allgemeinen zu erwarten, dass ein Theil davon vor dem wahren Coincidenzmomente ist, der andere Theil nach demselben; es wird dabei vortheilhaft sein wenn man vermeidet, dass das Verhältniss der Schwingungszeiten beider Pendel sich durch kleine Zahlen, [**14**] mit grosser Annäherung ausdrücken lässt. Findet aber dieses statt, so würde man die Beobachtungen auf eine ganz ähnliche Weise machen können, wie in dem Falle wo die Schwingungszeiten beider Pendel nahe gleich sind; man hat nur die Periode in welcher die Gleichheit der Schläge wieder eintritt, statt der einzelnen Schläge in jenem Falle, zu nehmen.

Bei dem langen Pendel, welches in etwa $1^s\!,725$ Uhrzeit eine Schwingung macht, habe ich die Regel befolgt, zuerst alle innerhalb 5 oder 6 Minuten vorfallenden Coincidenzen zu beobachten; dann etwa $14^m 22^s$ nach der ersten (in welcher Zeit das Pendel 500 Schwingungen vollendet), eine zweite Reihe, gleichfalls 5 oder 6 Minuten lang zu observiren, und so fort bis das Pendel über 4000 Schwingungen gemacht hatte. Es ist dabei eben so wenig nöthig, wie bei der ersten Methode, die Schwingungen zu zählen; denn die kleineren Zwischenzeiten in welchen Coincidenzen erfolgen, reichen hin, ihre Dauer mit so grosser Annäherung zu geben, dass über die Anzahl der entfernteren nie ein Zweifel bleiben kann. — Man findet sowohl jedes einzelne Moment, als die daraus abgeleiteten Mittel, in den dieser Abhandlung beigelegten Originalbeobachtungen angegeben, und zugleich findet man daselbst diejenigen Fehler dieser Mittel, welche man annehmen muss, damit die Summe ihrer Quadrate ein Minimum werde. Da die ähnliche Fehlerangabe auch bei den mit dem kurzen Pendel, also nach der ersten Methode gemachten Versuchen vorkömmt, so ist es leicht, die Genauigkeit beider Methoden miteinander zu vergleichen. Ich habe dazu die erste Reihe von Beobachtungen benutzt, welche 32 Versuche mit dem langen Pendel, jeder von 9 Momenten, und 16 Versuche mit dem kurzen Pendel, jeder von 11 Momenten, enthält. Die Summen der Quadrate der Fehler, diese in Zehntausendtheilen der Secunden der Uhr ausgedrückt, finden sich für beide

$$= 416779 \text{ und } 60676;$$

man erhält den mittleren Fehler eines der angegebenen Momente, wenn man diese Summen resp. mit 7,32 und 9,16 dividirt und aus den Quotienten die Quadratwurzel auszieht

$= 0^{s},00431$ und $0^{s},00205$

oder in Theilen einer Schwingung der beiden Pendel ausgedrückt

$= 0,00250$ und $0,00205$.

[15] Hieraus geht hervor, dass die Beobachtungen des kurzen Pendels genauer sind als die des langen; allein auch, dass die Fehler dieser letzteren noch so klein sind, dass die mit demselben gemachten Versuche sehr genaue Resultate verheissen.

6.

Die Uhr auf welche die Beobachtnngen der Pendelschwingnngen sich beziehen, ist die von Herrn *Repsold* verfertigte Hauptuhr der Sternwarte, deren vortrefflicher Gang sich schon viele Jahre hindnrch bewährt hat, wie die Tagebücher der Sternwarte zeigen. Jedoch würde es unpassend gewesen sein, sie ihrer Bestimmung zu den Beobachtnngen der Culminationen der Gestirne zu entziehen und sie vor dem Pendelapparate aufzustellen. Daher wird diese Uhr nicht unmittelbar, sondern mittelbar angewandt, indem die vor dem Pendelapparate aufgestellte, fortwährend mit ihr verglichen wurde.

Der Verfertiger der Uhr, an welcher die Coincidenzen nnmittelbar beobachtet wurden, ist mir unbekannt; sie ist ein Eigenthum des Herrn *Repsold*, welcher die Güte hatte, sie mir zu diesen Versnchen zu leihen. Sie ist an einem pyramidalischen Gestelle von Holz, mit hinreichender Festigkeit aufgestellt; sie ist mit dem Fussboden in keiner Verbindung, indem die Füsse ihres Gestells auf Pfählen ruhen, welche durch denselben hindurch in das Erdreich eingetrieben sind. Das Pendel dieser Uhr habe ich so geschraubt, dass sie in etwa einer Stunde eine Secnnde hinter der Sternzeit zurückbleibt, wodurch also in ohngefähr so langen Zwischenzeiten, die Schläge derselben mit denen der Hauptuhr zusammentreffen. Da die Uhr so gestellt ist, dass man sie, wenn man die Thür zwischen dem nördlichen und dem Meridianzimmer der Sternwarte öffnet, zugleich mit der *Repsold*'schen Uhr hören kann, so erlangt man dnrch die Coincidenzen der Schläge beider Uhren, eine genaue Vergleichung derselben, welche selten bis auf $0^{s},02$ zweifelhaft bleibt. Auf diese Weise wurde die Uhr vor dem Pendelapparate, welche ich, in der Angabe der Beobachtungen, stets durch P bezeichnen werde, einige Stunden vor und nach den Versuchen, mit der

Repsold'schen Uhr (R) verglichen, und daraus die Zwischenzeit der Coincidenzen, nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet; diese Zwischenzeit, verbunden mit dem aus den astronomischen Beobachtungen [**16**] gefolgerten Gange der Uhr R, ergab den Werth eines Pendelschlages von P, in mittlerer Zeit ausgedrückt.

Da indessen Stand und Gang einer Uhr unbekannte Functionen der Zeit sind, und die Anwendung von Beobachtnugen zur Bestimmung unbekannter Grössen nur dann von jeder Willkür frei ist, wenn die mathematische Form der beobachteten Quantitäten gegeben ist, so wird es nothwendig, dass ich die Art näher angebe, wie ich aus den Vergleichungen der Uhren unter einander und mit den astronomischen Beobachtnngen, den Werth eines Pendelschlages von P abgeleitet habe.

Wenn man die Zeit der Uhr R, welche zu einer der Coincidenzen mit der Uhr P gehört, durch t bezeichnet, die Zeiten der a^{ten}, b^{ten}, ... vor oder nach ihr durch $t^{(a)}$, $t^{(b)}$, ..., und wenn man den Unterschied der von beiden Uhren angegebenen Zeit nicht als gleichförmig sich verändernd annimmt, sondern von der Reihe

$$A + B\,(t^{(n)} - t) + C\,(t^{(n)} - t)^2 + \ldots.$$

welche ihn allgemein ausdrückt, das in die 3te Potenz der Zeit multiplicirte Glied und die höheren vernachlässigt, so erhält die Zeit einer der beobachteten Coincidenzen den Ausdruck

$$t^{(n)} = i + kn + l\,.\,nn$$

und die Beobachtung derselben giebt die Gleichung:

$$0 = -\,t^{(n)} + i + kn + l\,.\,nn.$$

Löset man alle durch die Beobachtungen gegebenen Gleichungen dieser Art nach der Methode der kleinsten Quadrate auf, so dass man l unbestimmt lässt, so findet man

$$k + l\left\{\frac{m(n^3) - (n)(nn)}{m(nn) - (n)^2}\right\} = \frac{m(nt) - (n)(t)}{m(nn) - (n)^2},$$

wo (n), (nn), (n^3).... die Summen

$$\begin{aligned}(n) &= a + b + c + \ldots.\\ (nn) &= aa + bb + cc + \ldots.\\ (nt) &= a\,t^{(a)} + b\,t^{(b)} + c\,t^{(c)} + \ldots.\end{aligned}$$

u. s. w.

[17] bezeichnen, m aber die Anzahl der Beobachtungen ist. Man hat aber die Zwischenzeit zweier Coincidenzen, deren Mitte auf die Zeit $t + k\tau$ fällt,

$$= k + 2l\tau,$$

worans hervorgeht, dass

$$\tau = \frac{1}{2}\left\{\frac{m(n)^3 - (n)(nn)}{m(nn) - (n)^2}\right\}$$

angenommen werden muss, damit l unbestimmt bleibe. Hat man daher aus den durch die Beobachtungen gegebenen Gleichungen k abgeleitet, ohne l, oder die Ungleichförmigkeit des Ganges zu berücksichtigen, so gilt diese Bestimmung der Zwischenzeit zweier Coincidenzen für die Zeit

$$t + \frac{k}{2}\left\{\frac{m(n^3) - (n)(nn)}{m(nn) - (n)^2}\right\}.$$

Auf diese Art habe ich nicht nnr den Werth von k welcher ans den gemachten Vergleichungen der Uhren folgt, sondern auch die Zeit für welche er gültig ist, berechnet, nnd in den Originalbeobachtungen angeführt. Fällt diese Zeit mit der Mitte des Versuchs bis auf wenige Minuten zusammen, wie es meistens der Fall ist, indem die Beobachtungen danach eingerichtet wurden, so habe ich sie ungeändert zur Bestimmung des relativen Ganges beider Uhren angewandt; ist sie aber stärker verschieden, so habe ich eine zweite Bestimmnng von k, für eine andere Zeit zu erhalten gesucht, und aus beiden, nnter Annahme einer der Zeit proportionalen Aendernng, den Werth von k für die Mitte des Versuchs gefolgert.

Den täglichen Gang der Uhr R gegen Sternenzeit habe ich, dnrch die, gleichfalls bei den Originalbeobachtungen angeführten, aus den Tagebüchern der Sternwarte ausgezogenen Correctionen derselben, abgeleitet, und dabei den aus zwei aufeinanderfolgenden Bestimmnngen hervorgehenden Werth desselben, für die Mitte der Zeit gültig angenommen; die verschiedenen Bestimmnngen dieser Art sind, ebenfalls nnter der Annahme der Zeit proportionaler Aenderungen, auf die Mitten der einzelnen Versuche reducirt.

Bezeichnet man die so bestimmte tägliche Aenderung der Correction der Uhr R durch s, so erhält man den in mittlerer Zeit ausgedrückten Werth eines Pendelschlages von P, aus der Formel:

[18]
$$\frac{365{,}2422577}{366{,}2422577} \cdot \frac{86400}{86400 - s} \cdot \frac{k}{k-1}$$
$$= \{0{,}997269567 + s \, . \, 0{,}000011543\} \frac{k}{k-1} \, .$$

Die Beilage III enthält eine, nach dieser Formel berechnete Tafel.

7.

Die Temperatur des Pendelapparates wird durch drei Thermometer e', e'', e''' bestimmt, deren Kugeln folgende Höhen über dem Boden des Gehäuses haben:

$$e' = 196 \text{ Lin.}; \quad e'' = 584 \text{ Lin.}; \quad e''' = 1292 \text{ Lin.}$$

Die Kugeln dieser Thermometer sind in das Eisen der grossen Stange eingelassen und mit Deckeln von demselben Metalle verdeckt, so dass angenommen werden kann, dass sie die wahre Temperatur derselben, und auch der Toise, welche mit der Stange eine gleiche Dicke hat, zeigen. Sie sind von Herrn *Fortin* in Paris verfertigt und mir von Herrn Professor *Schumacher* gütigst überlassen. Sie haben die hunderttheilige Scale, wurden aber wiederholt von dem Apparate abgenommen und mit zwei Thermometern verglichen, welche ich, nach der in der VII. Abtheilung meiner Beobachtungen gegebenen Methode berichtigt hatte. Hieraus ging die Verbesserungstafel für die unmittelbaren Angaben dieser Thermometer hervor, welche ich in der IV. Beilage mittheile. Die bei den Versuchen ausgeführten Temperaturen sind die schon berichtigten.

Da die Temperatur in der Sternwarte und in dem Gehäuse für den Apparat, in verschiedenen Höhen oft sehr ungleich war, vorzüglich bei grosser Wärme, und durch keines der von mir versuchten Mittel gleich gemacht werden konnte, so wird es nöthig, die Temperatur der Theile des Apparats, welche nicht gleich hoch mit den Thermometern sind, aus den Angaben zweier derselben, der Höhe proportional zu bestimmen. Ich habe daher die Temperatur für die Höhe h, wenn diese grösser ist als die Höhe des Thermometers e'',

$$= \frac{1292 - h}{708} e'' + \frac{h - 584}{708} e'''$$

[19] angenommen; wenn sie kleiner ist

$$= \frac{584 - h}{388} e' + \frac{h - 196}{388} \cdot e''.$$

Hieraus folgt, wie aus der IV. Beilage hervorgeht, die mittlere Temperatur der Toise

$$\tau = 0{,}4095 . e'' + 0{,}5905 . e''';$$

und unter der Annahme, dass sie 0,0008 Linie kürzer ist als die *Toise du Pérou*, und dass das Eisen sich, für jeden Grad des hundertheiligen Thermometers, *Bordas* Angabe zu Folge, um 0,0000114 seiner Länge ausdehnt, ihre jedesmalige Länge

$$= 863^{l}{,}9992 \cdot \frac{1 + \tau . 0{,}0000114}{1 + 16{,}52 . 0{,}0000114}$$
$$= 863^{l}{,}839174 + \tau . 0^{l}{,}00984777.$$

Ferner erhält man die Temperatur, welche zur Berechnung der um den Halbmesser der Pendelkugel verminderten Entfernung des Fühlhebels von dem Aufhängepunkte des kurzen Pendels angewandt werden muss,

$$\tau' = 0{,}6494 . e' + 0{,}3506 . e''$$

und diese Entfernung selbst, die für $\tau' = 0$ stattfindende durch F bezeichnet,

$$= F + \tau' . 0^{l}{,}0054132,$$

wobei zu bemerken ist, dass eine etwanige Unsicherheit des Coefficienten von τ', keinen erheblichen Einfluss auf das Resultat der Versuche haben kann, indem es sich ohnehin von selbst versteht, dass man die zusammengehörigen Beobachtungen beider Pendel in nicht sehr verschiedenen Temperaturen macht.

Die Temperatur der Luft im Gehäuse des Apparats, ist durch die Thermometer l' und l'' (oder l''') beobachtet, und in den Originalbeobachtungen in wahren Centesimalgraden angeführt. Die Angabe des mit der Pendelkugel in gleicher Höhe befindlichen Thermometers l' dient zur Berechnung der Reduction auf den leeren Raum. Allein von der halben Summe der Temperaturen an beiden Enden des Fadens, hängt auch die Länge desselben ab; wenn nämlich zur Zeit der Messungen der Höhe der Kugel, welche immer am Anfange und am Ende eines Versuchs gemacht sind, die mittlere Temperatur der Luft durch L bezeichnet wird, zur Zeit [**20**] einer Schwingung des Pendels durch L', so ist die Länge des schwingenden Pendels zu der gemessenen im Verhältnisse

$$1 + L' . 0{,}000011898 : 1 + L . 0{,}000011898$$

wo die Ausdehnung des Stahlfadens nach Herrn *Troughtons* Angabe genommen ist. Die Schwingungszeit, welche das Pendel gehabt haben würde, wenn es die aus den Messungen folgende Länge unverändert beibehalten hätte, muss daher, sehr nahe, mit

$$1 + (L' - L)\, 0{,}000005949$$

multiplicirt werden um die wirkliche Schwingungszeit zu ergeben.

8.

Die Mikrometerschraube, durch welche die Höhenunterschiede der Kugel, in zusammengehörigen Versuchen, gemessen werden, erhebt oder erniedrigt, wie ich schon in der Beschreibung des Apparats angeführt habe, den Cylinder von Stahl, auf welchem der Fühlhebel befestigt ist. Dieser Cylinder lässt sich um seine Axe drehen, so dass man messen kann, sowohl wenn der Fühlhebel nach der rechten Seite, als auch wenn er nach der linken gewandt ist; das erstere ist der in der Zeichnung dargestellte Fall. Durch diese Einrichtung hat Herr *Repsold* einen doppelten Zweck erreicht. Es ist nämlich klar, dass die polirte Stahlebene am Fühlhebel, welche mit der Kugel in Berührung gebracht wird, nicht genau horizontal gemacht werden kann, weil sie sich um die Axe des Fühlhebels drehen muss; daher muss ein Fehler entstehen, wenn beide Pendel, zwischen welchen der Höhenunterschied gemessen werden soll, nicht genau auf denselben Punkt der Ebene treffen; dieser verschwindet aber gänzlich, wenn man die Messung mit dem umgewandten Fühlhebel wiederholt, und es war daher unnöthig eine Vorrichtung anzubringen, wodurch man sich überzeugen könnte, dass beide Pendel genau in derselben Lothlinie hängen. Ferner kann man dadurch, dass man eine Wasserwage auf das Gehäuse des Fühlhebels setzt, und den Cylinder dann um seine Axe dreht, prüfen ob er genau lothrecht steht; ich habe ihn auf diese Art vollkommen scharf berichtigen können.

Die Mikrometerschraube, welche den Fühlhebel erhöhet und erniedrigt, zeigt auf einer Scale die ganzen Drehungen und auf ihrer Trommel [**21**] die Hunderttheile derselben. Den Werth ihrer Revolutionen habe ich nicht durch directe Messung, sondern durch die Schwingungen des kurzen Pendels bestimmt. Zu diesem Zwecke wurden acht Versuche gemacht, zwischen

welchen ich die Länge des Pendels, durch Drehung der Schraube am Aufhängungsrahmen, veränderte. Die gefundenen und gehörig reducirten Schwingungszeiten gaben, unter Annahme der Länge des einfachen Secundenpendels = $440{,}^{L}81$, folgende Werthe von F, d. i. der bei der Temperatur = 0 stattfindenden Entfernung des Aufhängepunkts, von dem einen Halbmesser der Kugel über dem Fühlhebel liegenden Punkte, wenn die Mikrometerschraube den Ort einnimmt, welcher dem Anfangspunkte ihrer Scale entspricht:

	Werthe von F
1. Versuch........	$441{,}^{L}1619 + 15{,}051 \cdot p$
2. ——	$441{,}8469 + 7{,}424 \cdot p$
3. ——	$442{,}4982 + 0{,}197 \cdot p$
4. ——	$442{,}4966 + 0{,}209 \cdot p$
5. ——	$441{,}8402 + 7{,}493 \cdot p$
6. ——	$441{,}1527 + 15{,}141 \cdot p$
7. ——	$440{,}4219 + 23{,}211 \cdot p$
8. ——	$440{,}4254 + 23{,}156 \cdot p$

Hier bedeutet p den Werth einer Drehung der Schraube, welche sich aus diesen Bestimmungen = $0{,}^{L}0902$ ergiebt. Die übrig bleibenden Fehler sind dann:

$+ 0{,}^{L}0031$
$- 0{,}0004$
$- 0{,}0004$
$- 0{,}0009$
$- 0{,}0003$
$+ 0{,}0020$
$- 0{,}0009$
$- 0{,}0023$

Obgleich man noch bedeutend grössere Höhenunterschiede mit der Mikrometerschraube messen kann, so sind die bei diesen Versuchen vorkommenden doch völlig hinreichend zur Bestimmung von p, indem, bei den zusammengehörigen Versuchen mit beiden Pendeln, immer nur sehr kleine [**22**] Höhenunterschiede, von wenigen Hunderttheilen einer Linie vorkommen. Wegen dieses geringen Einflusses von p, wird auch das Resultat dieser Abhandlung nicht merklich an Authenticität verlieren, indem ich die Originalbeobachtungen der angeführten acht Versuche nicht bekannt mache.

9.

Wenn man die Mikrometerschraube so weit aufwärts dreht, dass der lange Arm des Fühlhebels bis zu seinem Zeichen am Gehäuse steigt, so wirkt das Uebergewicht des Fühlhebels dem Gewichte der Kugel entgegen und vermindert dadurch die Spannkraft, und auch die Länge des elastischen Fadens. Ein Uebergewicht des Fühlhebels ist aber nothwendig, indem er ohne dieses nicht sicher gegen die Kugel drücken würde; man kann dasselbe verkleinern oder vergrössern, durch ein Gegengewicht, welches sich verschieben lässt. Ich habe dieses Gegengewicht so gestellt, dass die Stahlplatte des Fühlhebels in Gleichgewicht gesetzt wurde, wenn man ihren Mittelpunkt mit einem Gewichte von 32,84 Gran belastete. Ein gleiches Gewicht drückt also der Kugel, während die Pendellänge gemessen wird, entgegen. Um die daraus entstehende Verkürzung des Fadens kennen zu lernen, habe ich die Kugel mit verschiedenen Gewichten belastet und die dadurch entstandenen Verlängerungen mit der Mikrometerschraube gemessen. Da kleinere und grössere Gewichte immer übereinstimmten, so führe ich hier nur das Resultat des grössten von allen an; dieses wog 678,5 Gran, und verlängerte das lange Pendel mit der Kugel von Messing um 0,968p, das kurze um 0,311p, oder jenes um 0,^{L}0873, dieses um 0,^{L}0281. Hieraus folgt die Verkürzung, welche der Gegendruck des Fühlhebels verursacht, und um welche die unmittelbar gemessenen Längen vergrössert werden müssen,

= 0,^{L}0042 und 0,^{L}0014.

Für das Pendel mit der leichteren Elfenbeinkugel, welches einen schwächeren Faden hatte, fand ich auf dieselbe Art,

0,^{L}0082 und 0,^{L}0026.

Indessen folgt aus der Elasticität des Fadens noch eine andere Erscheinung, welche ich, obgleich sie keinen Einfluss auf die Resultate hat, **[23]** doch nicht unerwähnt lassen darf. Wenn man nämlich den Fühlhebel, sowohl durch Vorwärts- als Rückwärtsdrehen der Mikrometerschraube einstellt, so zeigt sich jedesmal im ersten Falle eine kleinere Pendellänge als im zweiten; der Unterschied beträgt, nach einem Mittel aus allen Versuchen, für das lange Pendel mit der Messingkugel 0,045p, und für das kurze 0,020p, oder 0,^{L}0041, und 0,^{L}0018. Aus der Ungleichheit dieser Zahlen geht hervor, dass er nicht die

Folge eines todten Ganges der Schraube sein kann, welcher nach Herrn *Repsold's* Versicherung, bei so feinen mit gehöriger Vollkommenheit gearbeiteten Schrauben, auch unmerklich ist. Seine Ursache ist vielmehr die Reibung, welche der Fühlhebel in seinen Axen erleidet (deren er zwei hat, indem er aus zwei Hebeln zusammengesetzt ist; wovon der erste den zweiten bewegt); nimmt man an, dass man ein Gewicht m auf die Stahlplatte am kurzen Arme des Fühlhebels legen müsste, um die Reibung zu überwinden, so ist die Kraft, welche er gegen die Kugel äussert, beim Aufwärtsschrauben $= 32{,}84 + m$, beim Abwärtsschrauben $= 32{,}84 - m$, also die Verkürzung des Pendels diesen Kräften proportional, und das Pendel beim Aufwärtsschrauben wirklich kürzer als beim Abwärtsschrauben. Aus der angeführten Grösse der Unterschiede geht hervor, dass m nahe die Hälfte des Uebergewichts von 32,84 Gran betragen muss; in der That erlangt der Fühlhebel, wenn man ihn mit einem Gewichte von dieser Schwere belastet, noch kein freies Spiel. Diese Erklärung des Unterschiedes stimmt mit der Verschiedenheit seiner an beiden Pendeln beobachteten Grösse so nahe überein, dass das Wenige, was daran fehlt, wohl den Beobachtungsfehlern, oder kleinen zufälligen Aenderungen in der Grösse der Reibung zugeschrieben werden kann, also nicht zu der Annahme eines todten Ganges der Schraube nöthigt. — Die wahre Pendellänge ist das Mittel aus zwei Messungen beim Auf- und Abwärtsschrauben, sowohl wenn der Unterschied von der angegebenen Ursache allein herrühret, als auch wenn ein kleiner todter Gang der Schraube dabei mitwirkt.

10.

Ich habe oben schon gesagt, dass ich die Vergleichung der Toise mit der *Toise du Pérou* der Güte der Herren *Arago* und *Zahrtmann* verdanke. Ein darüber, von diesen Herren angefertigtes Certificat, welches [24] ich in der V. Beilage mittheile, giebt an, dass die Länge um eine sehr kleine Quantität, nämlich $0{,}^{l}0008$ kürzer ist als das Original der Toise.

Die Toise ist 19 Linien breit und 4,2 dick, und mit Sorgfalt gearbeitet. Ihr Gebrauch bei den Pendelversuchen setzt voraus, dass die Entfernung der Endflächen, in der Axe der Stange gemessen, die wahre Länge ist; denn die Kugel am Abwickelungscylinder liegt immer auf dieser Mitte, und mit der Mitte steht die

Toise auf der horizontalen Ebene am Cylinder (i). Da ich aber nicht weiss, ob die Vergleichung mit der *Toise du Pérou* sich gleichfalls auf die Mitte bezieht, so habe ich für nöthig gehalten, zu untersuchen, ob die beiden Endflächen senkrecht auf der Axe der Toise stehen. Dieses hat sich wirklich so gezeigt, durch eine Prüfungsart, welche über ein Tausendtheil einer Linie keinen Zweifel lässt. Das Mittel, was ich zu dieser Untersuchung der Toise angewandt habe, bot der Pendelapparat selbst dar. Es kommt nämlich nur darauf an, die Berührungspunkte der Kugel am Abwickelungscylinder und der Toise, durch Verschiebung des Aufhängungsrahmen, zu verändern, und durch die Mikrometerschraube zu prüfen, ob die Kugel des angehängten Pendels immer eine gleiche Höhe behält, oder ob diese sich durch das Verschieben verändert. Um die der Ausführung dieser Prüfung im Wege stehende Schwierigkeit zu beseitigen, welche darin liegt, dass die Kugel am Abwickelungscylinder nicht weit über die Mitte der Toise hinaus, zurück geschoben werden kann, indem die grosse eiserne Stange dieses verhindert, ersuchte ich Herrn *Repsold*, einen Abwickelungscylinder zu verfertigen, welcher statt der Kugel eine abgerundete Spitze hat, so dass sein Berührungspunkt mit der Toise weiter rückwärts liegt. Fig. 4 Taf. II ist derselbe dargestellt.

Mittelst dieser Einrichtung habe ich fünf Punkte auf jeder Endfläche der Toise untersucht, nämlich den Mittelpunkt und die 0,8 Linie und 1,6 Linie nach beiden Seiten von ihm entfernten Punkte. Um die Art wie dieses geschah deutlich angeben zu können, werde ich die beiden Punkte, welche zwischen dem Mittelpunkte und derjenigen Seite der Toise liegen, auf welcher die Aufschrift und ein eingetheilter halber Fuss befindlich sind, durch ihre positiv genommenen Entfernungen von der Axe, also durch + 0,8 und + 1,6; die nach der entgegengesetzten Seite liegenden durch — 0,8 und — 1,6 bezeichnen; die Endfläche, welche sich an dem eingetheilten Ende der Toise befindet, werde ich die erste, die entgegengesetzte die zweite Fläche nennen.

[**25**] Als die Toise so aufgestellt war, dass die Eintheilung sich unten, und die Aufschrift vorn befand, zeigte die Mikrometerschraube (in entgegengesetzten Lagen des Fühlhebels im Mittel) indem die Spitze des Abwickelungscylinders mit den verschiedenen Punkten der zweiten Fläche in Berührung gebracht wurde:

+ 1,6 . . . . . $0{,}^R201$
+ 0,8 . . . . . 0, 198
0,0 . . . . . 0, 189
— 0,8 . . . . . 0, 175
— 1,6 . . . . . 0, 171

Darauf wurde die Toise umgewandt: so dass die Aufschrift hinten war; in diesem Zustande fanden sich, für dieselben Punkte, die Angaben des Mikrometers,

+ 1,6 . . . . . $0{,}^R182$
+ 0,8 . . . . . 0, 179
0,0 . . . . . 0, 158
— 0,8 . . . . . 0, 144
— 1,6 . . . . . 0, 144

Dann wurde sie umgekehrt, so dass die Eintheilung oben und die Aufschrift vorn war, wodurch der Abwickelungscylinder mit den Punkten der ersten Fläche in Berührung kam, für welche das Mikrometer angab:

+ 1,6 . . . . . $0{,}^R353$
+ 0,8 . . . . . 0, 345
0,0 . . . . . 0, 336
— 0,8 . . . . . 0, 333
— 1,6 . . . . . 0, 330

Endlich wurde sie umgewandt, so dass die Aufschrift hinten war; das Mikrometer zeigte für

+ 1,6 . . . . . $0{,}^R946$
+ 0,8 . . . . . 0, 939
0,0 . . . . . 0, 937
— 0,8 . . . . . 0, 938
— 1,6 . . . . . 0, 935.

[**26**] Durch das Umwenden der Toise wird ein Fehler im Parallelismus derselben mit dem Cylinder, welcher den Fühlhebel trägt, unschädlich, so wie dasselbe ihn in doppelter Grösse zeigen muss. Daher giebt das Mittel aus den beiden ersten Versuchen die wahre Bestimmung der Punkte auf der zweiten Fläche gegen die Axe, das Mittel aus den beiden letzten dasselbe für die erste Fläche. Man erhält also die Höhen über dem Mittelpunkte ($p = 0{,}^L0902$):

	erste Fläche.	zweite Fläche.
+ 1,6	+ $0{,}^{l}0012$	+ $0{,}^{l}0016$
+ 0,8	+ 0,0005	+ 0,0014
— 0,8	— 0,0001	— 0,0013
— 1,6	— 0,0004	— 0,0014

So klein diese Abweichungen sind, darf man sie doch nicht als Fehler in der Construction der Toise annehmen; sie rühren, wenigstens zum Theil, von einer kleinen Krümmung her, welche die aufgestellte Toise zeigte. Es wurden nämlich die Entfernungen beider Enden und der Mitte der Toise, von dem vor ihr herabhängenden Pendelfaden gemessen und auf diese Weise gefunden, dass die Seite der Aufschrift convex, die entgegengesetzte concav war. Die Entfernung der Mitte von der geraden Linie durch beide Endpunkte, fand ich dadurch:

1. Versuch	0,18	Linie
2. ——	0,14	—
3. ——	0,11	—
4. ——	0,05	—

in welchen Angaben aber einige Hunderttheile der Linie unsicher sein können. Diese Krümmung der Toise muss Höhenunterschiede der verschiedenen Punkte der beiden Endflächen geben, welche in demselben Sinne sind wie die beobachteten. Nimmt man die Sagitte für die beiden ersten Versuche über die erste Fläche = $0{,}^{l}08$, für die über die zweite Fläche = $0{,}^{l}16$ und betrachtet man die Seitenflächen der Toise als concentrische Cylinderflächen, so werden die Endflächen, falls sie senkrecht auf den Seitenflächen stehen, verlängert, in der Axe des Cylinders zusammentreffen, und hieraus werden Höhenunterschiede der Punkte auf den Endflächen entstehen, welche [27] für die erste + $0{,}^{l}0006$, + $0{,}^{l}0003$, — $0{,}^{l}0003$, — $0{,}^{l}0006$, und für die zweite + $0{,}^{l}0012$, + $0{,}^{l}0006$, — $0{,}^{l}0006$, — $0{,}^{l}0012$ betragen, und mit dem Resultate der Versuche ziemlich nahe übereinstimmen. Man könnte eine noch grössere Uebereinstimmung erlangen, wenn man, ohne die Sagitte zu ändern, eine andere Krümmung annähme. Allein die Versuche selbst sind nicht so sicher als man mit der Mikrometerschraube messen kann; denn da es nothwendig war, das Gehäuse des Apparats, bei dem Verschieben des Aufhängungsrahmens zu öffnen, so kann ein Einfluss der Temperatur übrig geblieben sein, obgleich ich ihn, so viel als möglich, zu vermeiden suchte. Ich glaube daher nicht, dass

man aus diesen Versuchen etwas anderes folgern darf, als dass der Parallelismus der Endflächen, wenn die Toise auf eine Ebene gelegt und dadurch vollkommen gerade geworden ist, nirgends einen $0{,}^{L}001$ übersteigenden Fehler hat.

11.

Die Schwingungsweiten beider Pendel sind auf einer Scale gemessen, welche eine in halbe Linien getheilte gerade Linie, und 1276,5 Linien von dem Aufhängepunkte des langen Pendels, 412,5 Linien von dem des kurzen entfernt ist. Die Entfernung der Grenzen der Bewegung der Pendel, auf dieser Scale, in Pariser Linien gemessen, ist in der mit dem Buchstaben μ überschriebenen Columne der Originalbeobachtungen angegeben.

Indessen darf, bei der Berechnung des Einflusses der Grösse der Schwingungen auf die Zeit derselben, nicht unberücksichtigt bleiben, dass die Scale sich nicht in der Schwingungsebene des Pendels, sondern 18 Linien hinter derselben befindet, woraus folgt, dass man die Weiten grösser sieht als sie wirklich sind. Bei dem langen Pendel wurde μ mit einem Fernrohre beobachtet, welches 18 Fuss = 2592 Linien von der Scale entfernt und etwas seitwärts gestellt war, so dass man damit neben dem Uhrpendel vorbeisehen konnte; die wahre Schwingungsweite ist daher

$$= \mu \cdot \frac{2574}{2592} = \frac{143}{144} \cdot \mu$$

wodurch man die grösste Entfernung des Pendels von der Lothlinie (u') aus der Formel

$$\operatorname{tang} u' = \frac{143 \cdot \mu}{2 \cdot 144 \cdot 1276{,}5} = \frac{143 \cdot \mu}{367632}$$

[28] erhält. Drückt man die Schwingungszeit durch diese Tangente aus, so erhält man sie

$$= t\left\{1 + \frac{1}{16}\operatorname{tg} u'^2 - \frac{37}{1024}\operatorname{tg} u'^4 + \text{u. s. w.} \ldots\right\}$$

oder, da bei meinen Versuchen nur das vom Quadrate abhängige Glied merklich ist

$$= t\,\{1 + \alpha \,.\, \mu\mu\}$$

wo $\alpha = \left(\frac{143}{1470528}\right)^2$ und $\log. \alpha = 1{,}97574 - 10$ ist.

Bei dem kurzen Pendel lagen die Grenzen der Schwingungen noch in dem Raume, welchen man durch das, zwischen dem Apparate und der Uhr befindliche Objectiv übersehen konnte, und wurden daher durch dasselbe Fernrohr beobachtet, welches die Coincidenzen angab. Hierbei ist der Einfluss der Entfernung der Scale vom Pendelfaden weit grösser, und es fand sich, durch eine zweite Scale, welche in die Ebene der Bewegung gebracht wurde, dass 10 Linien derselben, 11 Linien der entfernteren deckten. Man hat also für das kurze Pendel, die wahre Schwingungsweite

$$= \frac{10}{11}\,\mu$$

ferner

$$\text{tang}\, u' = \frac{10.\mu}{2.11.412{,}5} = \frac{2\mu}{1815}$$

und die Schwingungszeit

$$= t\,\{1 + \alpha\mu\mu\}$$

wo $\alpha = \frac{1}{(3630)^2}$, log. $\alpha = 2{,}88018 - 10$ ist.

12.

Nachdem ich alle Einrichtungen und Umstände, deren Kenntniss nöthig zu sein scheint, angezeigt habe, werde ich jetzt die Art der Berechnung der Versuche angeben; zuerst wie die Dauer einer Schwingung, in Secunden der Uhr P bestimmt wurde.

Ich fange mit dem langen Pendel an. Im 5. Artikel ist die Beobachtungsart schon beschrieben, und es ist dort angeführt, wie mehrere einzelne Beobachtungen zu 9 arithmetischen Mitteln vereinigt worden sind, deren jedes etwa 500 Schwingungen von dem vorhergehenden oder folgenden [**29**] entfernt ist. Diese Mittel wurden zuerst auf runde Zahlen von Schwingungen immer genau um 500 von einander verschieden, reducirt, wobei die Dauer einer Schwingung so angenommen wurde, wie sie aus der Vergleichung des ersten und letzten Mittels folgt; man findet die Resultate dieser Reduction, unter der Aufschrift »Reducirte Mittel der Beobachtungen« angeführt, und ich habe dabei nur zu erinnern, dass die Annahme gleichzeitiger Schwingungen bei der Reduction auf die runden Zahlen, keinen merklichen Fehler erzeugt, wenn auch, der Strenge nach, die früheren Schwingungen,

wegen der grösseren Winkel, etwas länger dauern als die späteren. Die bei diesen reducirten Mitteln angegebenen Schwingungsweiten und Temperaturen sind nicht unmittelbar beobachtet, indem in derselben Zeit, für welche diese Angaben gelten, die Coincidenzen wahrgenommen werden mussten; allein sie sind immer aus zwei Beobachtungen am Anfange und am Ende dieser Coincidenzen interpolirt, und dadurch noch etwas genauer geworden als eine einzelne sie gegeben haben würde. Durch diese Werthe von μ, l' und l''' wurden, nach den Formeln des 7. und 11. Artikel, der Unterschied y der Dauer einer Schwingung von der für $u' = 0$ und die mittlere Temperatur der Messung der Länge des Pendels $= L$ stattfindenden, diese letztere als Einheit angenommen, nämlich

$$y = \alpha\mu\mu + 0{,}000005949\left(\frac{l' + l'''}{2} - L\right)$$

für jedes der 9 Momente berechnet. Der Einfluss dieses Unterschiedes auf jedes der 8 Intervalle $= \int y\,dt = Y$, wurde durch mechanische Quadratur bestimmt, wobei aber die zweiten und folgenden Differenzen die letzte in die Rechnung aufgenommene Decimale oft nicht mehr ändern, so dass dann Y geradezu dem Producte der Zwischenzeit in die halbe Summe der Werthe y, für den Anfang und das Ende des Intervalls, gleich wird.

Wenn daher t die Dauer einer Schwingung des Pendels, für einen unendlich kleinen Schwingungswinkel und die mittlere Temperatur der beiden Messungen der Länge bezeichnet, Y, Y', Y'' u. s. w. . . die Werthe von $\int y\,dt$ für die verschiedenen Intervalle, so sind die Ausdrücke der Zwischenzeiten

$$\begin{array}{c} 500\,t + Y \\ 500\,t + Y' \\ 500\,t + Y'' \\ \text{u. s. w.} \end{array}$$

[30] oder, wenn der Bequemlichkeit wegen, $500\,t = h + x$ gesetzt wird, wo h ein genäherter Werth von $500\,t$, also x eine kleine, durch die Beobachtungen zu bestimmende Verbesserung ist,

$$\begin{array}{c} h + Y + x \\ h + Y' + x \\ h + Y'' + x \\ \text{u. s. w.} \end{array}$$

Bezeichnet man ferner durch T die Uhrzeit des ersten Moments, und durch z ihren Beobachtungsfehler, so hat man, wenn man zuerst $h + Y + x$ zu $T + z$, dann $h + Y' + x$ zu der Summe, u. s. w. addirt, die Ausdrücke der Uhrzeiten der 9 beobachteten Momente, und wenn man die wirklich beobachteten davon abzieht, die 9 Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= z \\ 0 &= n^{(1)} + z + x \\ 0 &= n^{(2)} + z + 2x \\ &\ldots\ldots \\ 0 &= n^{(8)} + z + 8x \end{aligned}$$

deren Auflösung nach der Methode der kleinsten Quadrate,

$$x = -\frac{1}{60}\{4n^{(8)} + 3(n^{(7)} - n^{(1)}) + 2(n^{(6)} - n^{(2)}) + n^{(5)} - n^{(3)}\}$$

$$z = -\frac{1}{9}\{n^{(1)} + n^{(2)} + \ldots. + n^{(8)}\} - 4x$$

ergiebt. Die Substitution der gefundenen Werthe von x und z in die Ausdrücke der 9 Zeiten, giebt die Zahlen, welche in der »Rechnung« überschriebenen Columne der Versuche vorkommen, und die Vergleichung derselben mit den beobachteten, die am vortheilhaftesten vertheilten Fehler. Ich erinnere noch, dass man die angewandten Werthe von Y, Y', Y''...., welche ich besonders anzuführen für unnöthig hielt, leicht aus der »Rechnung« überschriebenen Columne herausbringt, wenn man von den Zwischenzeiten, welche sie ergiebt, 500 t abzieht.

Für das kurze Pendel habe ich die Rechnung in derselben Form geführt; nur enthalten hier die Intervalle die zwischen zwei unmittelbar beobachteten Coincidenzen liegende Anzahl der Schwingungen, also eine Zahl, welche, theils wegen der Beobachtungsfehler, theils wegen der abnehmenden [31] Schwingungswinkel, nicht ganz gleich bleibt. Dieses macht indessen keine Aenderung in der Art die Rechnung zu führen, wenn man nur die Aufmerksamkeit anwendet, den Näherungswerth der Schwingungszeit, mit welchen man die oben durch h bezeichnete Grösse berechnet, dem endlichen Resultate so nahe anzunehmen, dass die, der Schärfe nach, für alle Intervalle nicht ganz gleichen Werthe von x, nicht mehr um solche Grössen verschieden sind, bis auf welche die Rechnung richtig geführt werden soll. Da bei den Versuchen mit dem kurzen Pendel 11 Momente vorkommen, so sind die Formeln

$$x = -\frac{1}{220}\{5.n^{(10)} + 4(n^{(9)} - n^{(1)}) + 3(n^{(8)} - n^{(2)}) + 2(n^{(7)} - n^{(3)}) + n^{(6)} - n^{(4)}\}$$

$$z = -\frac{1}{11}\{n^{(1)} + n^{(2)} + \ldots + n^{(10)}\} - 5x$$

anzuwenden.

Diese Vorschriften beziehen sich auf die mit der Kugel von Messing gemachten Versuche. Bei der Anwendung der Kugel von Elfenbein, nahmen aber die Schwingungswinkel so schnell ab, dass mit dem langen Pendel nur 3, mit dem kurzen nur 5 Momente beobachtet werden konnten. Für jenes hat man daher

$$x = -\frac{1}{2}n^{(2)}$$

$$z = -\frac{1}{3}(n^{(1)} + n^{(2)}) - x$$

für dieses

$$x = -\frac{1}{10}\{2n^{(4)} + n^{(3)} - n^{(1)}\}$$

$$z = -\frac{1}{5}\{n^{(1)} + n^{(2)} + n^{(3)} + n^{(4)}\} - 2x.$$

Allgemein ist für $m + 1$ Momente:

$$x = -\frac{6}{m.m+1.m+2}\{m.n^{(m)} + (m-2)(n^{(m-1)} - n^{(1)}) + (m-4)(n^{(m-2)} - n^{(2)}) + \text{u. s. w.} \ldots\}$$

$$z = -\frac{1}{m+1}\{n^{(1)} + n^{(2)} + \ldots + n^{(m)}\} - \frac{m}{2}x.$$

[32] 13.

Die auf diese Art gefundenen, und, der Vorschrift im 6. Art. gemäss, in mittlerer Zeit ausgedrückten Schwingungszeiten der Pendel, müssen von dem Einflusse befreit werden, welchen die Luft darauf äussert. Wenn man die Masse eines, in einer Flüssigkeit sich bewegenden Körpers durch m, die Masse der durch denselben aus dem Wege gedrängten Flüssigkeit durch m'

bezeichnet, so hat man die beschleunigende Kraft, welche der Körper erfährt, seit *Newton*,

$$= \frac{m - m'}{m}$$

angenommen, und dieser Annahme gemäss auch die Pendelversuche reducirt.

Diese Annahme gründet sich darauf, dass man die bewegende Kraft, welche der Körper erfährt, und welche $= m - m'$ ist, auf die im Körper befindliche Masse m vertheilt hat. Sie muss aber nicht nur auf diese, sondern auf alle Massentheile, welche mit dem Körper in Bewegung gesetzt werden, also auch auf die bewegten Theile der Flüssigkeit, vertheilt werden, wodurch der Nenner der Formel, welche die beschleunigende Kraft ausdrückt, nothwendig grösser wird als m.

Ich werde die Drehung eines Körpers um eine horizontale Axe betrachten, und die Entfernnng seines Schwerpunkts von derselben, durch s bezeichnen; seine Masse durch m; die Summe aller Massentheile in das Quadrat ihrer Entfernung von der Axe multiplicirt durch $m(\mu + ss)$, wo also $m\mu$ das Moment der Trägheit für den Schwerpunkt ist; den Winkel der durch die Drehungsaxe und den Schwerpunkt gelegten Ebene mit der Lothlinie durch u; die Länge des einfachen Secundenpendels durch λ. Nach diesen Bezeichnungen hat man bekanntlich, durch den Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft, die Differentialgleichung der Bewegung im leeren Raume:

$$c = m(\mu + ss)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2\pi^2\lambda . ms . \cos u.$$

Bewegt sich aber der Körper in einer Flüssigkeit, so gehört auch diese znm bewegten Systeme, und es ist einleuchtend, dass alle drei Glieder der Gleichung dadurch Veränderungen erfahren. Zuerst bewirkt der Stoss des Körpers gegen immer andere Theile der Flüssigkeit, in jedem Punkte des [33] Raums durch welchen der Körper sich bewegt, einen Verlust an lebendiger Kraft des ganzen Systems, also eine Verminderung von c, welche von der Geschwindigkeit und der äusseren Figur des Körpers abhängt und welche ich durch $\varphi\left(\frac{du}{dt}\right)$ andeuten werde; während des Zeittheilchens dt aber bewegt sich der Körper um du, wodurch die Verminderung von c, in diesem Zeittheilchen $= du\,\varphi\left(\frac{du}{dt}\right)$ wird,

also c selbst, nach einer endlichen Zeit, sich in $c - \int du\,\varphi\left(\frac{du}{dt}\right)$ verwandelt. Ferner kommt znm zweiten Gliede der Gleichung die Summe aller Theilchen der Flüssigkeit, jedes mit dem Quadrate seiner Geschwindigkeit multiplicirt, oder $\int vv\,dm'$ hinzu. Endlich wird dem dritten Gliede die Summe der Producte des auf jeden Punkt der Oberfläche wirkenden, nach der Richtung der Schwere zerlegten Drucks, in die Entfernung von der durch die Drehnngsaxe gelegten horizontalen Ebene und in $2\pi^2\lambda$ multiplicirt, hinzugefügt; von dieser Summe kann man leicht zeigen, dass sie $= 2\pi^2\lambda . m's' \cos u$ ist, wo s' die Entfernung des Schwerpunkts der äusseren Figur des Körpers von der Axe und m' die aus dem Wege gedrängte Flüssigkeit bezeichnet. Liegen die Schwerpnnkte der Masse und der Figur des Körpers und die Drehungsaxe, in einer Ebene, welches ich der Kürze wegen annehmen werde, indem der entgegengesetzte Fall sich leicht darauf reduciren lässt, so vereinigen sich das letzte Glied nnd das was die Flüssigkeit ihm hinzusetzt, und man erhält die Differentialgleichnng der Bewegung des Körpers in der Flüssigkeit:

$$c - \int du\,\varphi\left(\frac{du}{dt}\right) = m\,\{\mu + ss\}\left(\frac{du}{dt}\right)^2$$
$$+ \int vv\,dm' - 2\pi^2\lambda\,(ms - m's')\cos u.$$

Bisher hat man nur die von der Flüssigkeit herrührenden Theile des ersten und letzten Gliedes dieser Gleichnng in Rechnung gebracht. Jener erzeugt den Widerstand, von welchem gezeigt worden ist, dass er auf die Schwingungszeit keinen Einfluss hat, sondern nnr den Winkel verkleinert. Im letzten Gliede aber hat man bisher $s = s'$ gesetzt, obgleich dieses nur dann erlaubt ist, wenn das Pendel aus homogenen Theilen besteht. Der richtige Ausdruck von $ms - m's'$ ist aber, wenn M, M', M''... die Massen der einzelnen Theile, δ, δ', δ''... ihre specifischen Schweren, S, S', S''... die Entfernungen ihrer Schwerpunkte von der Axe, Δ die specifische Schwere der Flüssigkeit bezeichnen,

[34]
$$ms\left\{1 - \frac{\frac{MS}{\delta} + \frac{M'S'}{\delta'} + \frac{M''S''}{\delta''} + \text{u. s. w.}\ldots}{MS + M'S' + M''S'' + \text{u. s. w.}\ldots} \cdot \Delta\right\}.$$

Das was dem zweiten Gliede hinzugefügt werden muss, ist allgemein vernachlässigt worden.

Die vollständige Theorie der Bewegung eines Pendels in einer Flüssigkeit, setzt die über die ganze Masse derselben ausgedehnte Integration von $vv\,dm'$ voraus, welche man aber bekanntlich nicht erhalten kann, indem sie auf die allgemeine Schwierigkeit zurückkömmt, welche die Fortschritte der Hydrodynamik gehemmt hat. Wenn man voraussetzen wollte, dass jedes Theilchen der Flüssigkeit nur so lange in Bewegung ist als der schwingende Körper, so dass es seine Bewegung augenblicklich verliert, wenn dieser in Ruhe versetzt wird, so würde die Geschwindigkeit offenbar der des Körpers proportional, übrigens aber von der Figur des Körpers und dem Orte des Theilchens abhängig sein: in diesem Falle erhielte man also

$$\int vv\,dm' = m'K\left(\frac{du}{dt}\right)^2$$

wo K eine beständige Grösse ist, und die Schwingungszeit würde man durch Integration der Gleichung

$$c = m\left\{\mu + ss + \frac{m'}{m}K\right\}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2\pi^2\lambda\,(ms - m's')\cos u$$

erhalten, oder das Pendel würde sich bewegen wie ein einfaches, dessen Länge

$$= \frac{\mu + ss + \frac{m'}{m}K}{s - \frac{m'}{m}s'}$$

ist; der bisher vernachlässigte Theil würde also nur das Moment der Trägheit vermehren.

Obgleich diese Annahme der wirklichen Bewegung der Flüssigkeit, selbst für kleine Geschwindigkeiten, wahrscheinlich nicht entspricht, so kann man dasselbe Resultat, welches sie gegeben hat, doch durch eine Voraussetzung über die Form des Integrals $\int vv\,dm'$ erhalten, welche so allgemein ist, dass man das Resultat nicht mehr als hypothetisch betrachten darf. Von welcher Beschaffenheit nämlich auch dieses Integral sein mag, so lässt [**35**] sich immer annehmen, dass der Werth, welchen es allgemein zur Zeit t hat, nach der Vollendung zweier Schwingungen, wenn Ort und Bewegung des Pendels wieder dieselben geworden sind, wiederkehrt; dieses muss dann stattfinden, wenn die Um-

stände der anfänglichen Bewegung, durch die Widerstände verschwunden sind und Alles in den Beharrungszustand gekommen ist. Ist nun die Schwingungszeit diejenige, in welcher der Winkel nt um 180^0 wächst, wo n eine Constante, so hat das Quadrat der Geschwindigkeit der Flüssigkeit in jedem Punkte des Raums, einen Ausdruck, welcher seinen Werth wiedererlangt wenn nt um 360^0 wächst; ich werde ihn durch

$$u'u'nn\,\{a^{(0)} + a^{(1)}\cos(nt + A^{(1)}) + a^{(2)}\cos(2nt + A^{(2)}) \\ + \text{u. s. w.} \ldots$$

bezeichnen, wo u' den Schwingungswinkel des Pendels bedeutet, und $a^{(0)}, a^{(1)}, \ldots A^{(1)}, A^{(2)} \ldots$ im Falle der Proportionalität der Oscillationen der Flüssigkeit und des Pendels, beständige Grössen, im entgegengesetzten Falle von u' abhängig sein werden. Das über den ganzen, durch die Flüssigkeit gefüllten Raum ausgedehnte Integral $\int vv\,dm'$, muss also die Form

$$m'u'u'nn\{b^{(0)} + b^{(1)}\cos(nt + B^{(1)}) + b^{(2)}\cos(2nt + B^{(2)}) \\ + \text{u. s. w.} \ldots\}$$

annehmen, wo $b^{(0)}, b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots$ von der Figur des Körpers, und, allgemein zu reden, auch von dem Schwingungswinkel abhängen. Wenn aber der schwingende Körper von beiden Seiten gleichförmig ist, so dass er, bei der Bewegung nach beiden Seiten, der Flüssigkeit eine gleiche Oberfläche darbietet, so muss $\int vv\,dm'$ auch nachdem nt um 180^0 gewachsen ist, denselben Werth wiedererlangen, und hierdurch wird man den gegebenen Ausdruck abkürzen können, indem diese Bedingung, durch die Construction des Pendels, immer erreicht werden kann. In diesem Falle müssen nämlich die von nt, $3nt$, $5nt$, u. s. w. ... abhängigen Glieder verschwinden, weshalb der Ausdruck:

$$\int vv\,dm' = m'u'u'nn\{b^{(0)} + b^{(2)}\cos(2nt + B^{(2)}) \\ + b^{(4)}\cos(4nt + B^{(4)}) + \text{u. s. w.}\}$$

übrig bleibt.

Die Einwirkung dieses Ausdrucks auf die Bewegung des Pendels, habe ich in der VI. Beilage untersucht, und gefunden, dass sie, im Falle $\frac{m'}{m}$ eine kleine Grösse ist, deren Quadrat u. s. w. man vernachlässigen darf, auf die Ausdehnung der Schwingungen

keinen Einfluss hat, aber die Länge [36] des einfachen Pendels, welches mit dem sich in der Flüssigkeit bewegenden, zusammengesetzten, gleichzeitig schwingt,

$$= \frac{\mu + ss + \frac{2m'}{m}\{b^{(2)}\cos B^{(2)} - 2b^{(4)}\cos B^{(4)} + 3b^{(6)}\cos B^{(6)} - \text{etc.}\,.\}}{s\left\{1 - \frac{m's'}{ms}\right\}}$$

$$= \frac{\mu + ss + \frac{m'}{m}K}{s\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right)}$$

ergiebt.

Ob die Grösse K welche hier zum Momente der Trägheit des Pendels hinzugekommen, constant oder mit den Schwingungswinkeln veränderlich ist, hängt davon ab, ob die Ausdehnung der Bewegungen der Flüssigkeit den Schwingungswinkeln proportional ist oder nicht. Die Beobachtungen müssen darüber entscheiden; sie werden zeigen, dass der Einfluss der Luft constant ist, wenn Reihen von Coincidenzen, welche bei grösseren Schwingungswinkeln anfangen und bei kleineren enden, sich durch die gewöhnliche Reduction auf unendlich kleine Winkel vollständig darstellen lassen. Man wird weiter unten sehen, dass dieses wenigstens mit starker Annäherung der Fall ist.

Für ein Pendel welches an einem Faden aufgehängt, und dessen Masse in einem kleinen Raume vereinigt ist, kann die Ausdehnung der Bewegung aller Theile $= su'$ angenommen werden; im Falle der Proportionalität enthalten die Coefficienten $b^{(2)}, b^{(4)} \ldots$ dann den Factor ss, welcher für ein solches Pendel weit grösser ist als μ, so dass das Verhältniss $ss : ss + \mu$ sehr nahe $= 1$ ist. Dadurch wird die Einwirkung der Flüssigkeit von der Länge des Pendels unabhängig, oder es hat das, im Ausdrucke des gleichzeitig schwingenden einfachen Pendels, welchen ich nun durch

$$\frac{\mu + ss}{s - \frac{m'}{m}s}\left(1 + \frac{m'}{m}k\right)$$

bezeichnen werde, vorkommende k, für verschiedene Längen sehr nahe einen gleichen Werth.

14.

Dieses k hat man bisher als verschwindend angenommen, allein es geht aus der gegebenen Darstellung hervor, dass kein Grund dazu vorhanden ist; da die Grösse dieses Coefficienten unbekannt ist, so kann man nur [37] durch Versuche, welche auf seine Erfindung gerichtet sind, entscheiden, wie gross sein Einfluss auf das Resultat der Pendelversuche ist.

Das sich am ersten darbietende Mittel, aus den Versuchen richtige Resultate zu erhalten, wäre vielleicht, das Pendel im leeren Raume schwingen zu lassen; allein ich fürchte, dass dieses Schwierigkeiten haben würde, welche Zweifel anderer Art erzeugen könnten. Ein zweites Mittel ist, zwei Pendel schwingen zu lassen, welche ihrer Figur nach gleich, aber ihrer Masse nach sehr verschieden sind. In diesem Falle wird, da der Coefficient k für beide gleich ist, die Reduction auf den leeren Raum, welche der Masse umgekehrt proportional ist, sehr verschieden sein, und man wird sie aus beiden Versuchsreihen eliminiren können.

Dieses Mittel habe ich angewandt, indem ich, ausser der Kugel von Messing, eine von Elfenbein von gleicher Grösse schwingen liess, welche 4,6 Mal so leicht ist, und daher dem Coefficienten k eine bedeutend grössere Einwirkung auf das Resultat giebt.

Der Berechnung der Versuche mit beiden Kugeln, habe ich die Form gegeben, welche die vollständigste Uebersicht über das Verhalten der einzelnen gegeneinander, gewährt. Wenn die in mittleren Secunden ausgedrückte, beobachtete Schwingungszeit für einen unendlich kleinen Schwingungswinkel t genannt wird, die Länge des einfachen Secundenpendels λ, so ist die Länge des einfachen Pendels, welches in derselben Zeit schwingen würde,

$$l = \lambda tt;$$

hätte man aber die Beobachtungen im leeren Raume gemacht, so würde man eine kleinere Länge gefunden haben, nämlich

$$l' = \lambda tt \cdot \frac{1 - \frac{m'}{m}\frac{s'}{s}}{1 + \frac{m'}{m}k}.$$

Die Länge des Pendels ist aber, von der im 8. Artikel durch F bezeichneten, unbekannten Entfernung abhängig gemessen; sie

ist nämlich für das lange Pendel gleich der Summe der Längen dieses F und der Toise, beide für die Temperatur des Versuchs genommen, um die Wirkung der Elasticität des Fadens vermehrt und um die Angabe der Mikrometerschraube vermindert; für das kurze gleich der Summe derselben Quantitäten mit Ausschluss der [38] Toise; ich bezeichne beide durch $F + h$ und $F + h'$. Fügt man dieser Länge die Reduction des zusammengesetzten Pendels auf das einfache $= c$ hinzu, so erhält man

$$F + h + c,$$

welches dieselbe, aber noch von den unbekannten λ und k abhängige einfache Pendellänge l' ist, welche die Schwingungszeit ergeben hat. Man hat also

$$F + h + c = \lambda tt \cdot \frac{1 - \frac{m's'}{ms}}{1 + \frac{m'}{m} k};$$

oder, wenn man, um mit kleineren unbekannten Grössen zu rechnen, $\lambda = 440{,}^{L}81 + \varepsilon$ setzt,

$$F = 440{,}81\, tt - h - c + 440{,}81\, tt . \varepsilon \left(1 - \frac{m's'}{ms}\right)$$

$$- 440{,}81\, tt \cdot \frac{m's'}{ms} - (F + h + c) \frac{m'}{m} k.$$

Aus den Beobachtungen mit dem kurzen Pendel erhält man einen ähnlichen Ausdruck für F, und aus der Vergleichung beider ε abhängig von k. Allein bei den Versuchen mit der Kugel von Messing ist der Einfluss von k auf die Länge des einfachen Secundenpendels, $440{,}^{L}81 + \varepsilon$, weit kleiner, als bei denen mit der Kugel von Elfenbein; die aus beiden gefundenen Werthe von ε werden also k mit Vortheil ergeben, und man wird dadurch das Endresultat frei von diesem unbekannten Coefficienten erhalten.

Die in den eben angeführten Formeln vorkommenden Coefficienten von $\frac{m'}{m} k$, welche übrigens nur annäherungsweise bekannt sein dürften, finden sich aus der Verbindung zweier Beobachtungen, mit beiden Pendeln, unabhängig von der Einwirkung der Luft; nämlich

$$F + h + c = \frac{(h + c - h' - c')}{tt - t't'} \cdot tt;$$

$$F + h' + c' = \frac{(h + c - h' - c')}{tt - t't'} \cdot t't'.$$

Ich muss nun noch anführen, welche Bestimmungen der Berechnung von $\frac{m'}{m}$ zum Grunde gelegt worden sind.

15.

Die Dichtigkeit der Luft, welche ich angewandt habe, gründet sich auf die schönen Versuche der Herren *Biot* und *Arago*, welche fanden, dass Quecksilber 10475,6 Mal schwerer ist als atmosphärische Luft bei dem [**39**] Barometerstande $= 0,^m76$ und der Temperatur des schmelzenden Eises. *Brisson* fand Quecksilber 13,59995 Mal schwerer als Wasser, beide in der Temperatur des Eispunktes angenommen*). Endlich fand *Hällström***) die Dichte des Wassers für den Eispunkt $= 0,9997143$, die des dichtesten $= 1$ gesetzt. Hieraus folgt, dass das dichteste Wasser 770,488 Mal schwerer ist als Luft bei $0,^m76$ Barometerhöhe und der Temperatur des schmelzenden Eises; oder, die Dichte der Luft im Allgemeinen, für die auf den Eispunkt reducirte Barometerhöhe b, und die Temperatur x,

$$= \frac{1}{770,488} \cdot \frac{b}{0,76} \cdot \frac{1}{1 + x \,.\, 0,00375}.$$

Da das Barometer der Sternwarte, dessen wegen der Capillarität und des Theilungsfehlers berichtigte Höhen, bei den Originalbeobachtungen angegeben sind, eine in Pariser Linien getheilte Scale besitzt, so ist, wenn β seine angegebene Höhe und τ seine Temperatur bezeichnen,

$$b = \frac{\beta\{1 + (\tau - 16,25)\, 0,000018782\}}{443,296 \,.\left(1 + \frac{\tau}{5550}\right)}$$

und daher die Dichte der Luft am schwingenden Pendel, wo l' für x (Art. 7) zu setzen ist,

$$\Delta' = \frac{\beta}{337,006 \,.\, 770,488\,(1 + \tau \,.\, 0,0001614)(1 + l' \,.\, 0,00375)}.$$

*) *Hällström.* De pondere corporum specifico, ad normalem gradum caloris reducendo. Aboae 1809. p. 9.

**) *Hällström.* Dissertatio de mutationibus voluminis aquae destillatae. Aboae 1802.

Die specifische Schwere des Pendels mit der Kugel von Messing, habe ich, für die Temperatur des schmelzenden Eises, 8,18955 Mal so gross gefunden als die des dichtesten Wassers; bei der Temperatur l' ist sie daher

$$\varDelta = \frac{8{,}18955}{\{1 + l' . 0{,}000018782\}^3}.$$

Man erhält daher, da für dieses Pendel $1 - \frac{m's'}{ms}$ von $1 - \frac{m'}{m}$ nicht merklich verschieden ist,

$$\frac{m's'}{ms} = \frac{\varDelta'}{\varDelta} = \frac{\alpha\beta(1 + l' . 0{,}0000564)}{(1 + \tau . 0{,}0001614)(1 + l' . 0{,}00375)}$$

[40] wo

$$\alpha = \frac{1}{337{,}006 . 770{,}488 . 8{,}18955};\ \log\alpha = 3{,}67234 - 10$$

ist.

Die specifische Schwere der Kugel von Elfenbein ist, in derselben Temperatur, in welcher die Versuche damit gemacht sind, = 1,78337 gefunden worden; hier ist aber, wegen der Verschiedenheit der Materien, aus welchen das Pendel besteht, $\frac{s'}{s}$ etwas von der Einheit verschieden, weshalb ich nach der im 13. Artikel gegebenen Formel gerechnet, dabei die Massen und Schwerpunkte der einzelnen Theile der VII. Beilage gemäss angenommen, und die specifische Schwere der Theile von Messing = 8,4, des Fadens = 7,6 gesetzt habe. Auf diese Weise habe ich für das lange Pendel

$$\log\frac{m's'}{ms} = 9{,}74608 + \log\varDelta'$$

für das kurze

$$\log\frac{m's'}{ms} = 9{,}74636 + \log\varDelta'$$

erhalten. Setzt man für $\varDelta'$ seinen Ausdruck durch die Angabe der meteorologischen Instrumente, so erhält man

$$\frac{m's'}{ms} = \frac{\alpha\beta}{(1 + \tau . 0{,}0001614)(1 + l' . 0{,}00375)}$$

wo der Logarithme von α für das lange Pendel = 4,33168 — 10, für das kurze = 4,33196 — 10 ist.

Der Werth von $\frac{m'}{m}$ im Coefficienten von k ist für die Pendel mit der Elfenbeinkngel, aus der specifischen Schwere der Kngel, mit Inbegriff der eingeschraubten Klemme von Messing, = 1,79443 berechnet worden. Er ist also

$$= \frac{\alpha\beta}{(1 + \tau \,.\, 0{,}0001614)(1 + l' \,.\, 0{,}00375)}$$

angenommen, wo

$$\alpha = \frac{1}{337{,}006 \,.\, 770{,}488 \,.\, 1{,}79443}; \quad \log \alpha = 4{,}33167 - 10$$

ist.

16.

Um den Unterschied der Längen der einfachen nnd der zusammengesetzten gleichzeitig schwingenden Pendel des Apparats berechnen zn können, ist eine genaue Kenntniss der Gewichte beider Fäden nothwendig, [41] weshalb ich nicht unbemerkt lassen zu dürfen glaube, dass ich die Abwiegungen derselben so vorsichtig als es mir möglich war, und durch verschiedene Verbindnngen mit den übrigen kleinen Theilen der Pendel, gemacht habe, so dass ich sie bis auf ein Hunderttheil eines Grans für sicher halte. Obgleich ich aber auch bei dem Gewichte der Kugel die Hunderttheile des Grans angegeben habe, so ist dasselbe doch weniger sicher, vielleicht nur bis anf zwei bis drei Zehntel eines Grans, welche Unsicherheit aber auf die Reduction der Beobachtnngen keinen merklichen Einflnss hat.

Die kleinen Körper, womit die Pendel belastet sind, könnten geradezu als Punkte angenommen werden, und der Halbmesser der Kugel darf nur genähert bekannt sein, so weit als es nöthig ist um die Entfernung der Mittelpnnkte der Fignr nnd der Schwingnng, mit der erforderlichen Genauigkeit berechnen zu können. Genauer als zu diesem Zwecke nothwendig, hat ihn die Abwägung der Kugeln in Luft und in Wasser gegeben, wodurch man das Gewicht des gleichen Raums Wasser erhält, aus welchem der Halbmesser der Kugeln abgeleitet werden kann, da der Raum, welchen ein gegebenes Gewicht Wasser einnimmt, durch das Kilogramm bekannt ist. Die Momente der Trägheit der kleinen, an den Pendeln befindlichen Körper aber, habe ich aus ihren Figuren und Gewichten abgeleitet; sie sind genau genng, da man sie hätte ganz vernachlässigen können.

Diese Abwiegungen, so wie die Angabe aller, zur Berechnung der Reduction der zusammengesetzten auf die einfachen Pendel nöthigen Abmessungen, habe ich in der VII. Beilage mitgetheilt. Es geht aus derselben Beilage hervor, dass die Verbesserung der Pendellänge, welche aus der Drehung der Kugel um den Punkt wo sie an dem Faden befestigt ist, entsteht, und auf welche *Laplace* aufmerksam gemacht hat, für meinen Apparat nicht ganz unmerklich ist; sie wurde daher mit in Rechnung gebracht.

Die Berechnung des Einflusses der Zusammensetzung der Pendel setzt die Fäden als gleichförmig voraus. Soviel ich weiss ist bisher nicht näher untersucht worden, welchen Einfluss ihre Ungleichförmigkeit haben kann; ich habe daher diese Untersuchung in der VIII. Beilage gemacht und das Resultat erhalten, dass man die Ungleichheiten nicht fürchten darf, dass aber durch das Umkehren der Fäden, selbst wenn sie sehr ungleich wären, nichts erhebliches gewonnen werden würde.

[**42**] 17.

Nachdem, durch das Vorhergehende die Art wie die Beobachtungen gemacht und berechnet wurden, erläutert worden ist, werde ich die Versuche selbst näher angeben können.

Die erste Reihe von Versuchen wurde im April, Mai und Juni 1826 gemacht. Sie besteht aus acht von einander unabhängigen Bestimmungen, deren jede vier Versuche mit dem langen Pendel, und zwei mit dem kurzen Pendel enthält. Bei jeder dieser Bestimmungen, ist der 1. Versuch (a) mit dem langen Pendel und rechts gewandten Fühlhebel, der 2. (b) gleichfalls mit dem langen Pendel, umgekehrten Faden und links gewandten Fühlhebel gemacht; der 3. und 4. Versuch (c) und (d) sind mit dem kurzen Pendel, (c) mit rechts, (d) mit links gewandten Fühlhebel angestellt, (d) mit umgekehrtem Faden; der 5. und 6. Versuch (e) und (f) endlich, sind wie (a) und (b) gemacht, mit dem Unterschiede, dass der zwischen diesen umgekehrte Faden bei (e) umgekehrt blieb und erst bei (f) wieder in dieselbe Lage kam, die er bei dem Versuche (a) hatte. Zwischen solchen sechs zusammen gehörigen Versuchen ist die obere Befestigung des Messingblättchens immer völlig ungeändert geblieben, so dass bei allen genau dieselbe Stelle desselben den Abwickelungscylinder berührte. Vor dem Anfange einer neuen Bestimmung

aber habe ich das Messingblättchen, durch die Schraube am Anfhängungsrahmen, meistens etwas verkürzt oder verlängert. — Dass zu einer vollständigen Messnng der Höhe der Kngel, die Umwendung des Fühlhebels nothwendig ist, habe ich schon im 8. Artikel bemerkt; ich habe aber vorgezogen, sie nicht bei jedem Versuche vorzunehmen, sondern dagegen zwei aufeinander folgende Versuche bei entgegengesetzten Wendungen zu machen. Der Grund hiervon ist, dass das Umwenden nicht geschehen kann ohne das Gehäuse zu öffnen, wodurch eine Aenderung der Temperatnr hätte entstehen, nnd die Messungen nnsicher machen können. Doch habe ich, durch mehrere, schnell nacheinander wiederholte Umwendungen, zwischen jedem der Paare *ab*, *cd*, *ef* der Versuche, den sehr kleinen Unterschied der Höhen, welchen der Fühlhebel in beiden Wendungen angab, der Wahrheit nahe bestimmt und durch die Hälfte davon, mit gehörigen Zeichen genommen, die einzelnen Versuche verbessert. Dieses hat auf [**43**] das Resultat jedes Paars der Versnche keinen Einfluss und ist nur geschehen, damit die Abweichung der einzelnen Versnche von einander, unmittelbar vor Augen liegen sollte. Dabei, dass ich zwei Versuche mit dem langen Pendel, vor nnd nach zweien mit dem kurzen machte, beabsichtigte ich, der Voraussetzung der Unveränderlichkeit von F während einer Bestimmnng, weniger Einfluss auf das Resultat einzuränmen. Dass mit dem langen Pendel eine doppelt so grosse Anzahl von Versuchen gemacht ist, wie mit dem kurzen, hat seinen Grund in dem nngleichen Einflusse, welchen die Beobachtungsfehler auf die Bestimmung von F, bei beiden Pendeln änssern.

Die Resnltate dieser Reihe von Versuchen, deren Originale dieser Abhandlung beigelegt sind, sind folgende:

1. Bestimmung.

$$\left.\begin{array}{lrl}
\text{Versuch } a. & F = & 442{,}^{l}5845 + 2{,}9604.\varepsilon - 0{,}2040.k \\
b. & \ldots\ldots & 442{,}5855 + 2{,}9604.\varepsilon - 0{,}2028.k \\
e. & \ldots\ldots & 442{,}5711 + 2{,}9605.\varepsilon - 0{,}2012.k \\
f. & \ldots\ldots & 442{,}5886 + 2{,}9606.\varepsilon - 0{,}2007.k \\
\hline
\text{Mittel} & \ldots\ldots\ldots & 442{,}5824 + 2{,}9605.\varepsilon - 0{,}2022.k \\
\text{Versuch } c. & F = & 442{,}4687 + 1{,}0011.\varepsilon - 0{,}0685.k \\
d. & \ldots\ldots & 442{,}4601 + 1{,}0011.\varepsilon - 0{,}0680.k \\
\hline
\text{Mittel} & \ldots\ldots\ldots & 442{,}4644 + 1{,}0011.\varepsilon - 0{,}0683.k
\end{array}\right\}$$

$$\varepsilon = -\,0{,}^{l}0602 + 0{,}^{l}0683.k.$$

2. Bestimmung.

Versuch a. $F = 442{,}^{L}5793 + 2{,}9607 . \varepsilon - 0{,}2052 . k$
b. ..... $442{,}5812 + 2{,}9608 . \varepsilon - 0{,}2050 . k$
e. ..... $442{,}5960 + 2{,}9608 . \varepsilon - 0{,}2062 . k$
f. ..... $442{,}5903 + 2{,}9608 . \varepsilon - 0{,}2059 . k$
Mittel .... $442{,}5867 + 2{,}9608 . \varepsilon - 0{,}2056 . k$
Versuch c. $F = 442{,}4740 + 1{,}0014 . \varepsilon - 0{,}0697 . k$
d. ..... $442{,}4713 + 1{,}0014 . \varepsilon - 0{,}0696 . k$
Mittel .... $442{,}4727 + 1{,}0014 . \varepsilon - 0{,}0696 . k$

$$\varepsilon = - 0{,}^{L}0582 + 0{,}^{L}0694 . k.$$

[44]

3. Bestimmung.

Versuch a. $F = 442{,}^{L}5912 + 2{,}9615 . \varepsilon - 0{,}2024 . k$
b. ..... $442{,}5945 + 2{,}9614 . \varepsilon - 0{,}2013 . k$
e. ..... $442{,}5633 + 2{,}9615 . \varepsilon - 0{,}1976 . k$
f. ..... $442{,}5784 + 2{,}9615 . \varepsilon - 0{,}1966 . k$
Mittel .... $442{,}5818 + 2{,}9615 . \varepsilon - 0{,}1995 . k$
Versuch c. $F = 442{,}4676 + 1{,}0020 . \varepsilon - 0{,}0678 . k$
d. ..... $442{,}4590 + 1{,}0020 . \varepsilon - 0{,}0673 . k$
Mittel .... $442{,}4633 + 1{,}0020 . \varepsilon - 0{,}0675 . k$

$$\varepsilon = - 0{,}^{L}0605 + 0{,}^{L}0674 . k.$$

4. Bestimmung.

Versuch a. $F = 442{,}^{L}5626 + 2{,}9615 . \varepsilon - 0{,}1980 . k$
b. ..... $442{,}5635 + 2{,}9615 . \varepsilon - 0{,}1975 . k$
e. ..... $442{,}5803 + 2{,}9615 . \varepsilon - 0{,}1988 . k$
f. ..... $442{,}5759 + 2{,}9616 . \varepsilon - 0{,}1982 . k$
Mittel .... $442{,}5706 + 2{,}9615 . \varepsilon - 0{,}1981 . k$
Versuch c. $F = 442{,}4566 + 1{,}0021 . \varepsilon - 0{,}0671 . k$
d. ..... $442{,}4603 + 1{,}0020 . \varepsilon - 0{,}0671 . k$
Mittel .... $442{,}4584 + 1{,}0020 . \varepsilon - 0{,}0671 . k$

$$\varepsilon = - 0{,}^{L}0573 + 0{,}^{L}0669 . k.$$

5. Bestimmung.

Versuch *a*. $F = 442^{L},5687 + 2{,}9619.\varepsilon - 0{,}1925.k$
b. .....$442,5607 + 2{,}9618.\varepsilon - 0{,}1928.k$
e. .....$442,5809 + 2{,}9618.\varepsilon - 0{,}1950.k$
f. .....$442,5787 + 2{,}9618.\varepsilon - 0{,}1954.k$
Mittel ....$442,5723 + 2{,}9618.\varepsilon - 0{,}1939.k$
Versuch *c*. $F = 442,4510 + 1{,}0022.\varepsilon - 0{,}0635.k$
d. .....$442,4584 + 1{,}0022.\varepsilon - 0{,}0659.k$
Mittel ....$442,4547 + 1{,}0022.\varepsilon - 0{,}0656.k$

$$\varepsilon = -\ 0^{L},0600 + 0{,}0655.k.$$

[45] 6. Bestimmung.

Versuch *a*. $F = 442^{L},5776 + 2{,}9618.\varepsilon - 0{,}1911.k$
b. .....$442,5670 + 2{,}9618.\varepsilon - 0{,}1911.k$
e. .....$442,5576 + 2{,}9617.\varepsilon - 0{,}1937.k$
f. .....$442,5752 + 2{,}9616.\varepsilon - 0{,}1957.k$
Mittel ....$442,5694 + 2{,}9617.\varepsilon - 0{,}1929.k$
Versuch *c*. $F = 442,4557 + 1{,}0021.\varepsilon - 0{,}0655.k$
d. .....$442,4544 + 1{,}0021.\varepsilon - 0{,}0657.k$
Mittel ....$442,4551 + 1{,}0021.\varepsilon - 0{,}0656.k$

$$\varepsilon = -\ 0^{L},0583 + 0^{L},0650.k.$$

7. Bestimmung.

Versuch *a*. $F = 442^{L},5617 + 2{,}9616.\varepsilon - 0{,}1954.k$
b. .....$442,5790 + 2{,}9617.\varepsilon - 0{,}1955.k$
e. .....$442,5732 + 2{,}9617.\varepsilon - 0{,}1953.k$
f. .....$442,5688 + 2{,}9617.\varepsilon - 0{,}1949.k$
Mittel ....$442,5707 + 2{,}9617.\varepsilon - 0{,}1953.k$
Versuch *c*. $F = 442,4563 + 1{,}0021.\varepsilon - 0{,}0655.k$
d. .....$442,4617 + 1{,}0021.\varepsilon - 0{,}0654.k$
Mittel ....$442,4590 + 1{,}0021.\varepsilon - 0{,}0655.k$

$$\varepsilon = -\ 0^{L},0570 + 0{,}0662.k.$$

8. Bestimmung.

Versuch *a*.	$F = 442^{l},5806 + 2{,}9614.\varepsilon - 0{,}1939.k$	
b.	$442{,}5778 + 2{,}9611.\varepsilon - 0{,}1945.k$	
e.	$442{,}5713 + 2{,}9614.\varepsilon - 0{,}1928.k$	
f.	$442{,}5688 + 2{,}9614.\varepsilon - 0{,}1927.k$	
Mittel	$442{,}5746 + 2{,}9614.\varepsilon - 0{,}1935.k$	
Versuch *c*.	$F = 442{,}4579 + 1{,}0017.\varepsilon - 0{,}0655.k$	
d.	$442{,}4517 + 1{,}0017.\varepsilon - 0{,}0649.k$	
Mittel	$442{,}4548 + 1{,}0017.\varepsilon - 0{,}0652.k$	

$$\varepsilon = -\, 0^{l},0611 + 0^{l},0655.k.$$

[46] 18.

Dieser Reihe von Versuchen habe ich, im April 1827, eine zweite von drei Bestimmungen, gleichfalls mit der Kugel von Messing, hinzugefügt. Die Absicht dabei war nicht sowohl die schon erlangte Genauigkeit des Resultats zu vermehren, als das gegenseitige Verhalten dreier verschiedenen Aufhäugungsarten des Pendels kennen zu lernen.

Ich wünschte nämlich, zu erfahren, welchen Einfluss es auf den Mittelpunkt der Bewegung hat, wenn das Pendel, statt auf vorbeschriebene Art, durch Abwickelung von einem Cylinder zu schwingen, sich um eine Schneide, und an einem am oberen Ende festgeklemmten Faden bewegt. Da aber, aus dem Unterschiede der Längen beider Pendel des Apparats, worauf die Bestimmung der Länge des einfachen Secundenpendels, nach der befolgten Methode, gegründet wird, die Einwirkung der Aufhängungsart auf den Mittelpunkt der Bewegung verschwindet, so erlangen auch diese drei neuen Bestimmungen dasselbe Recht, zum Endresultate zu stimmen, welches die früheren haben.

Die Einrichtungen zu diesen vergleichenden Versuchen der verschiedenen Aufhängungsarten, deren Ausführung ich Herrn *Repsold* verdanke, ist folgende. Statt des Fig. 3, Taf. II abgebildeten Abwickelungscylinders, wird ein ähnlicher, welchen die 5. Figur von der Seite und die 6. von oben gesehen darstellt, unter dem Aufhängungsrahmen befestigt, so dass die durch die Axe desselben gehende Ebene, durch welche sein vorderes Ende ausgeschnitten ist, horizontal wird. Auf dieser Ebene ruhten sowohl der Abwickelungscylinder, als die Schneide und die

Klemme, mit welchen die Versnche, von welchen hier die Rede ist, gemacht worden sind.

Der Abwickelungscylinder selbst ist in der 7. Figur dargestellt; er hat $0^{l},996$ Durchmesser. Bei seinem Gebrauche liegt er auf der Ebene nnd wird, von dem durch das Gewicht der Pendelkugel angespannten Messingblättchen, für welches der in beiden Figuren 5 und 6 sichtbare Einschnitt der Ebene gemacht ist, an die beiden über diese Ebene hervorragenden Schraubenköpfe angedrückt, wodurch er seine feste Lage erhält. Die Schneide ist Figur 8 gezeichnet; Herr *Repsold* hat ihr, wie ans der Abbildung hervorgeht, die schöne Einrichtung gegeben, dass man, durch kleine Gegengewichte an zwei horizontalen Armen, ihren Schwerpunkt genau unter [**47**] den Anfhängepunkt bringen kann, so dass sie vertical hängt; das Gegengewicht am dritten verticalen Arme dient, ihr eine beliebige Schwingungszeit zu geben; sie ist vom feinsten Stahl gemacht und ausgezeichnet schön angeschliffen. Die Klemme endlich, Figur 9, besteht ans zwei Stahlstücken, welche durch zwei Schranben zusammengepresst werden und dann so genau schliessen, dass man die Trennungslinie beider Stücke nicht sehen kann. Auch diese Klemme, in welcher ein Messingblättchen befestigt wird, liegt bei dem Gebranch auf der horizontalen Ebene, und das Messingblättchen, woran das Pendel, auf dieselbe Art wie bei dem Gebrauche des Abwickelungscylinders, befestigt wird, hat in dem Einschnitte der Ebene freien Spielraum.

Aus dieser Beschreibung der Einrichtung geht hervor, dass die Anfhängepnnkte der Pendel an der Schneide nnd Klemme gleich hoch, allein $0^{l},498$ niedriger sind als am Abwickelungscylinder. Versuche mit den drei Pendeln mussten also zeigen, ob die Verschiedenheit der Aufhängungsarten, Einflnss auf den Mittelpunkt der Bewegung hatte. Damit dieses ans den Versnchen desto sicherer hervorgehen sollte, habe ich dieselben so angeordnet, dass die drei Aufhängungsarten stets mit einander abwechselten, nnd dass anf diese Art die drei nenen Bestimmungen nicht eine nach der anderen, sondern alle gleichzeitig gemacht wurden. Die erste derselben, oder die 9. nach fortgehender Zählung, ist mit der Schneide, die 10. mit der Klemme, die 11. mit dem Abwickelungscylinder gemacht; jede enthält 6 Versuche, nämlich (*a*) mit dem langen Pendel, (*b*) mit dem kurzen nnd rechts gewandten Fühlhebel, (*c*) mit dem ersteren und links gewandten Fühlhebel; dann mit umgekehrten Fäden, (*d*) mit dem langen, (*e*) mit dem kurzen Pendel nnd links gewandten Fühlhebel, end-

lich (f) mit dem ersteren und wieder rechts stehenden Fühlhebel. Alle diese Versuche sind mit denselben Fäden gemacht; die näheren Angaben der einzelnen Theile der Pendel und die Berechnung ihrer Zusammensetzung findet man in der VII. Beilage.

Die Beobachtungen in ihrer ursprünglichen Form sind, so wie die früheren, dieser Abhandlung beigelegt. Ihre Resultate sind folgende:

[48] 9. Bestimmung. Schneide.

Versuch a. $F = 442^{L},6485 + 2{,}9606.\varepsilon - 0{,}2024.k$
c. ..... $442,6460 + 2{,}9606.\varepsilon - 0{,}2046.k$
d. ..... $442,6534 + 2{,}9606.\varepsilon - 0{,}2056.k$
f. ..... $442,6501 + 2{,}9607.\varepsilon - 0{,}2010.k$
Mittel .... $442,6495 + 2{,}9606.\varepsilon - 0{,}2034.k$
Versuch b. $F = 442,5336 + 1{,}0012.\varepsilon - 0{,}0687.k$
e. ..... $442,5334 + 1{,}0012.\varepsilon - 0{,}0692.k$
Mittel .... $442,5335 + 1{,}0012.\varepsilon - 0{,}0690.k$

$$\varepsilon = -\,0^{L},0592 + 0^{L},0686.k.$$

10. Bestimmung. Klemme.

Versuch a. $F = 442^{L},6069 + 2{,}9607.\varepsilon - 0{,}2022.k$
c. ..... $442,6229 + 2{,}9607.\varepsilon - 0{,}2045.k$
d. ..... $442,6141 + 2{,}9606.\varepsilon - 0{,}2071.k$
f. ..... $442,6220 + 2{,}9610.\varepsilon - 0{,}2000.k$
Mittel .... $442,6165 + 2{,}9608.\varepsilon - 0{,}2035.k$
Versuch b. $F = 442,4964 + 1{,}0012.\varepsilon - 0{,}0687.k$
e. ..... $442,4998 + 1{,}0013.\varepsilon - 0{,}0689.k$
Mittel .... $442,4981 + 1{,}0013.\varepsilon - 0{,}0688.k$

$$\varepsilon = -\,0^{L},0604 + 0{,}0687.k.$$

11. Bestimmung. Abwickelungscylinder.

Versuch a. $F = 443^{L},1011 + 2{,}9615.\varepsilon - 0{,}2036.k$
c. ..... $443,1058 + 2{,}9615.\varepsilon - 0{,}2055.k$
d. ..... $443,1159 + 2{,}9616.\varepsilon - 0{,}2066.k$
f. .... $443,1133 + 2{,}9618.\varepsilon - 0{,}2007.k$
Mittel .... $443,1090 + 2{,}9616.\varepsilon - 0{,}2041.k$
Versuch b. $F = 442,9973 + 1{,}0022.\varepsilon - 0{,}0686.k$
e. ..... $442,9971 + 1{,}0022.\varepsilon - 0{,}0686.k$
Mittel .... $442,9972 + 1{,}0022.\varepsilon - 0{,}0686.k$

$$\varepsilon = -\,0^{L},0571 + 0^{L},0692.k.$$

[49] Da der Einfluss des noch unbekannten Coefficienten k, auf alle drei Bestimmungen sehr nahe gleich ist, so kann man schon beurtheilen, dass sie im Endresultate, bis auf unerhebliche Kleinigkeiten, untereinander, und ebenso mit den früheren acht, übereinstimmen. Die Werthe von F aber, welche sie ergeben, sind für

die Schneide .... 442,'4742 — 0,'0003.k
die Klemme 442,4376
den Abwickelungscylinder 442,9400 + 0,0007.k

Zieht man von dem letzten Resultate den Halbmesser des Abwickelungscylinders = 0,'498 ab, so bleibt derjenige Werth von F übrig, welchen man erhalten haben würde, wenn die Axe des Abwickelungscylinders sich in derselben Ebene befunden hätte, in welcher die beiden anderen Aufhängungspunkte lagen; er ist = 442,'4420. Dass die beiden letzten, ziemlich nahe übereinstimmenden Werthe von F, von dem ersten verschieden sind, zeigt dass die Schneide den Mittelpunkt der Bewegung merklich höher ergiebt als die beiden anderen Aufhängungsarten. Eine weitere Erläuterung dieses Gegenstandes werde ich in dem zweiten Abschnitte geben; hier verweile ich nicht länger dabei, da sie auf das Resultat keinen Einfluss hat.

19.

Die dritte Reihe von Versuchen machte ich im November 1827 mit der Kugel von Elfenbein. Sie besteht aus vier Bestimmungen, bei deren jeder sowohl der Fühlhebel umgewandt, als auch die Fäden umgekehrt wurden. Bei den beiden ersten wurde das Pendel am Abwickelungscylinder aufgehängt, bei den beiden letzten an der Schneide. Da diese Kugel weit weniger wiegt als die Kugel von Messing und beide dieselbe Grösse haben, so ist die Einwirkung des Widerstandes auf die Schwingungswinkel für dieselbe weit grösser als für die letztere. Die Versuche mussten daher weit früher geschlossen werden, als die vorigen; dieses theils, weil bei dem langen Pendel, die Grenzen innerhalb welchen das Weisse durch den Coincidenzcylinder ganz verdeckt wird (Art. 5), für kleine Schwingungen zu weit werden, theils aber auch weil es wesentlich war, alle Versuche mit [50] nahe gleichen Schwingungswinkeln anzufangen und zu endigen. Aus diesen Gründen umfassen die Versuche mit dem langen Pendel

nur 1000 Schwingungen, die mit dem kurzen etwa 2500, welches letztere völlig hinreichend ist, jedem einzelnen Resultate alle wünschenswerthe Genauigkeit zu geben; bei dem langen Pendel ist dieses nicht so der Fall, allein es blieb nichts anders übrig als die Versuche zu wiederholen, um dadurch zu ersetzen was jedem einzelnen an Genauigkeit abgeht. Ferner muss ich bemerken, dass, um die Unsicherheit zu vermeiden, welche aus den Veränderungen des bekanntlich sehr hygroscopischen Elfenbeins, im Halbmesser der Kugel entstehen kann, stets zwei zusammengehörige Versuche unmittelbar nacheinander gemacht wurden, so dass auf einen Versuch mit dem langen Pendel, sogleich einer mit dem kurzen folgt. Die um die Zeit dieser Versuche sehr gleichförmige Temperatur der Sternwarte, begünstigte diese Anordnung, indem sie unnöthig machte, zwischen dem Oeffnen des Gehäuses und den Versuchen, eine lange Zeit verstreichen zu lassen. Jede Bestimmung enthält also vier Versuche mit jedem Pendel, deren zusammengehörige ich durch gleiche Buchstaben $a\,a'\,b\,b'$, ... bezeichnet habe. Wegen der Zusammensetzung der Pendel mit der Kugel von Elfenbein, verweise ich auf die VII. Beilage. Die Resultate der vier damit gemachten Bestimmungen, sind folgende:

12. Bestimmung. Abwickelungscylinder.

Versuch a.	$F = 443{,}^{L}7439 + 2{,}9607.\varepsilon - 0{,}9145.k$
b.	$443{,}6964 + 2{,}9607.\varepsilon - 0{,}9113.k$
c.	$443{,}7078 + 2{,}9605.\varepsilon - 0{,}9097.k$
d.	$443{,}7147 + 2{,}9607.\varepsilon - 0{,}9131.k$
Mittel	$443{,}7157 + 2{,}9607.\varepsilon - 0{,}9122.k$
Versuch a'.	$F = 443{,}1554 + 1{,}0010.\varepsilon - 0{,}3088.k$
b'......	$443{,}1483 + 1{,}0010.\varepsilon - 0{,}3079.k$
c'......	$443{,}1567 + 1{,}0011.\varepsilon - 0{,}3072.k$
d'......	$443{,}1550 + 1{,}0011.\varepsilon - 0{,}3085.k$
Mittel	$443{,}1539 + 1{,}0011.\varepsilon - 0{,}3081.k$

$$\varepsilon = -\,0{,}^{L}2867 + 0{,}^{L}3083.k.$$

[51] 13. Bestimmung. Abwickelungscylinder.

Versuch a. $F = 443^{L},7347 + 2{,}9606.\varepsilon - 0{,}9147.k$
b. ..... $443{,}7236 + 2{,}9606.\varepsilon - 0{,}9187.k$
c. ..... $443{,}7208 + 2{,}9606.\varepsilon - 0{,}9185.k$
d. ..... $443{,}7304 + 2{,}9604.\varepsilon - 0{,}9191.k$
Mittel .... $443{,}7274 + 2{,}9606.\varepsilon - 0{,}9178.k$
Versuch a'. $F = 443{,}1552 + 1{,}0009.\varepsilon - 0{,}3085.k$
b'..... $443{,}1646 + 1{,}0009.\varepsilon - 0{,}3103.k$
c'..... $443{,}1540 + 1{,}0013.\varepsilon - 0{,}3101.k$
d'..... $443{,}1374 + 1{,}0009.\varepsilon - 0{,}3102.k$
Mittel .... $443{,}1528 + 1{,}0010.\varepsilon - 0{,}3098.k$

$$\varepsilon = -0^{L},2932 + 0^{L},3103.k.$$

14. Bestimmung. Schneide.

Versuch a. $F = 443^{L},2804 + 2{,}9609.\varepsilon - 0{,}9357.k$
b. ..... $443{,}2942 + 2{,}9607.\varepsilon - 0{,}9478.k$
c. ..... $443{,}2841 + 2{,}9607.\varepsilon - 0{,}9477.k$
d. ..... $443{,}3006 + 2{,}9608.\varepsilon - 0{,}9360.k$
Mittel .... $443{,}2898 + 2{,}9608.\varepsilon - 0{,}9418.k$
Versuch a'. $F = 442{,}7105 + 1{,}0009.\varepsilon - 0{,}3168.k$
b'..... $442{,}7126 + 1{,}0009.\varepsilon - 0{,}3202.k$
c'..... $442{,}7058 + 1{,}0009.\varepsilon - 0{,}3199.k$
d'..... $442{,}6915 + 1{,}0008.\varepsilon - 0{,}3158.k$
Mittel .... $442{,}7051 + 1{,}0009.\varepsilon - 0{,}3182.k$

$$\varepsilon = -0^{L},2983 + 0^{L},3182.k.$$

15. Bestimmung. Schneide.

Versuch a. $F = 443^{L},2508 + 2{,}9607.\varepsilon - 0{,}9320.k$
b. ..... $443{,}2724 + 2{,}9607.\varepsilon - 0{,}9319.k$
c. ..... $443{,}2730 + 2{,}9608.\varepsilon - 0{,}9342.k$
d. ..... $443{,}2921 + 2{,}9608.\varepsilon - 0{,}9341.k$
Mittel .... $443{,}2721 + 2{,}9608.\varepsilon - 0{,}9331.k$
Versuch a'. $F = 442{,}7116 + 1{,}0010.\varepsilon - 0{,}3149.k$
b'..... $442{,}7129 + 1{,}0008.\varepsilon - 0{,}3149.k$
c'..... $442{,}7082 + 1{,}0008.\varepsilon - 0{,}3154.k$
d'..... $442{,}7020 + 1{,}0008.\varepsilon - 0{,}3156.k$
Mittel .... $442{,}7087 + 1{,}0009.\varepsilon - 0{,}3152.k$

$$\varepsilon = -0^{L},2875 + 0^{L},3153.k.$$

[52] Der Werth von F welchen diese vier Bestimmungen ergeben, ist für

den Abwickelnngscylinder... 442ˡ,8631 + 0ˡ,0007.k
die Schneide.............. 442,4109 + 0,0003.k.

Zwischen beiden ist der Unterschied = 0ˡ,4522 + 0ˡ,0004k; die beiden Bestimmungen im 18. Artikel ergaben denselben = 0ˡ,4658 + 0ˡ,0010k. Es scheint nicht nothwendig zu sein, dass Versuche mit schweren und leichteren Pendeln, bei welchen das Messingblättchen mit verschiedener Kraft an den Abwickelungscylinder angedrückt wird, in dem Unterschiede der Mittelpunkte der Bewegung beider Aufhängungsarten, völlig übereinstimmen. Das leichtere Pendel mit der Kugel von Elfenbein, hat übrigens, so wie das schwerere, ergeben, dass der Mittelpunkt der Bewegung bei der Schneide höher liegt, als bei dem Abwickelungscylinder; hier ist der Unterschied 0ˡ,045, bei dem anderen Pendel 0ˡ,032 gefunden.

20.

Die in den drei letzten Artikeln mitgetheilten Resultate, sind aus den Beobachtungen unter der Voraussetzung berechnet, dass der durch k bezeichnete, von der Bewegung der Lnft abhängige Coefficient, für alle Schwingnngswinkel, bei welchen beobachtet worden ist, denselben Werth besitzt. Ob dieses wirklich der Fall ist, erlaubt die, der Berechnung der Versuche gegebene Form, leicht zu prüfen. Man darf nur die mittleren Fehler in der »Rechnung« überschriebenen Columne (Art. 12), für jedes einzelne Moment der Versuche, dnrch die ganze Reihe derselben hindnrch, aufsuchen, um dadurch sogleich beurtheilen zu können, ob nur zufällige Fehler, oder gesetzmässig fortgehende Abweichungen der der Rechnung zum Grnnde gelegten Formel von den Beobachtungen, vorhanden sind.

Diese mittleren Fehler aus allen ähnlichen Versuchen, findet man folgendermassen:

1) 14 Versnche mit der Kugel von Messing und dem langen Pendel:

1. Moment....... — 0ˢ,0010
2. —— .... — 0,0014
3. —— .... + 0,0008
4. —— .... + 0,0012

[53] 5. Moment....... + 0,"0010
6. —— .... + 0,0011
7. —— .... + 0,0001
8. —— .... — 0,0007
9. —— .... — 0,0011

2) 22 Versuche mit der Kugel von Messing und dem kurzen Pendel.

1. Moment....... + 0,"0005
2. —— .... + 0,0005
3. —— .... — 0,0003
4. —— .... — 0,0005
5. —— .... — 0,0007
6. —— .... — 0,0003
7. —— .... + 0,0005
8. —— .... + 0,0004
9. —— .... — 0,0005
10. —— 0,0000
11. —— .... + 0,0004

3) 16 Versuche mit der Kugel von Elfenbein und dem langen Pendel.

1. Moment....... — 0,"0015
2. —— .... + 0,0030
3. —— .... — 0,0015

4) 16 Versuche mit der Kugel von Elfenbein und dem kurzen Pendel.

1. Moment....... — 0,"0017
2. —— .... + 0,0012
3. —— .... + 0,0016
4. —— 0,0000
5. —— .... — 0,0011

Man sieht hieraus, dass am Anfange und am Ende der Versuche kleine negative Abweichungen, in der Mitte ähnliche positive, vorherrschen, welche zwar weit kleiner sind als die möglichen Fehler der Coincidenzen, aber doch durch die Wiederholung der Versuche und durch ihren regelmässigen Gang, [53] ein gewisses Gewicht erlangen; selbst das entgegengesetzte Resultat der Versuche mit der Messingkugel am kurzen Pendel, schwächt die Annahme, dass die Abweichungen die angegebene Regel befolgen, nicht so sehr als es auf den ersten Blick scheint; denn bei den Versuchen mit dieser Kugel müssen sie, im Fall

sie wirklich von der Luft herrühren, nur $\frac{2}{9}$ der Grösse haben, welche sie bei der Kugel von Elfenbein erreichen. Da überdies die grösseren Abweichungen bei den Versuchen mit der letzten Kugel vorkommen, so kann man annehmen, dass alle Beobachtungen zusammengenommen, einen kleinen Einfluss des Schwingungswinkels auf den Werth des Coefficienten k wahrscheinlich machen. Dieses angenommen, so folgt daraus, dass indem am Anfange die Schwingungszeit etwas kleiner, am Ende etwas grösser beobachtet als berechnet ist, der Coefficient k mit abnehmenden Schwingungswinkeln zunimmt.

Um das Mittel der Beobachtungen vollständiger darzustellen, müsste man die Reductionsformel auf unendlich kleine Winkel etwas ändern, wodurch man Schwingungszeiten für diese, grösser herausbringen würde als sie berechnet worden sind. Allein es ist leicht zu übersehen, dass dieses auf das Endresultat keinen Einfluss haben kann: denn, da alle Versuche bei nahe gleichen Winkeln gemacht sind, und die Aenderung für beide Kugeln in demselben Verhältnisse ist, in welchen die ihnen zukommenden Coefficienten von k sind, so muss sie, wenn man k selbst aus dem Resultate eliminirt, zugleich mit verschwinden. Die Resultate bedürfen daher keiner Verbesserung.

21.

Das arithmetische Mittel aus den 11 Bestimmungen mit der Kugel von Messing ist:

$$\varepsilon = -\,0^{L}{,}05903 + 0^{L}{,}06734\,.\,k$$

aus den 4 Bestimmungen mit der Kugel von Elfenbein:

$$\varepsilon = -\,0^{L}{,}29143 + 0^{L}{,}31303\,.\,k.$$

Aus der Vergleichung beider folgt:

$$k = 0^{L}{,}9459$$
$$\varepsilon = +\,0^{L}{,}0047$$

oder die Länge des einfachen Secundenpendels für die Königsberger Sternwarte:

440,8147 Linien.

Substituirt man den gefundenen Werth von k in die durch die einzelnen Bestimmungen gegebenen Bedingungsgleichungen, so erhält man, aus jeder derselben, die Länge des einfachen Secundenpendels:

Beobachtungen mit der Kugel von Messing.

		Unterschied vom Mittel.	Temperatur der Toise. C
1. Bestimmung	$440^{L},8144$	$-0^{L},0003$	$+5^{\circ},88$
2. ——	8174	+ 0,0027	5,06
3. ——	8133	— 0,0014	9,00
4. ——	8160	+ 0,0013	11,43
5. ——	8120	— 0,0027	18,54
6. ——	8132	— 0,0015	19,45
7. ——	8156	+ 0,0009	18,20
8. ——	8109	— 0,0038	21,88
9. ——	8157	+ 0,0010	5,50
10. ——	8146	— 0,0001	6,04
11. ——	8184	+ 0,0037	5,94

Beobachtnngen mit der Kugel von Elfenbein.

		Unterschied vom Mittel.	Temperatur der Toise. C
12. Bestimmung	$440^{L},8149$	$+0^{L},0002$	$+5^{\circ},00$
13. ——	8103	— 0,0044	3,83
14. ——	8127	— 0,0020	3,12
15. ——	8207	+ 0,0060	4,09

Die Höhe in welcher die Kugel des Pendels sich befand, ist einen Fuss über dem Fussboden der Sternwarte, oder 67,2 Fuss = 11,2 Toisen über dem mittleren Wasserstande des Pregels, welches als die Höhe über der Fläche der Ostsee angesehen werden kann, da der Strom kein erhebliches Gefälle hat. [**56**] Die dieser Höhe zukommende Verminderung der Pendellänge ist $0^{L},0032$. Man hat daher die Länge des einfachen Secundenpendels auf die Oberfläche der Ostsee reducirt:

$$= 440,8179 \text{ Linien.}$$

22.

Ueber den wahrscheinlichen Fehler dieses Resultats wage ich keine Meinung zu äussern, indem man zwar wohl den Einfluss einzelner Fehlerursachen schätzen kann, allein dadurch

selten ein richtiges Urtheil über das Resultat einer zusammengesetzten Operation erhält. Einzelne Ursachen werde ich etwas näher betrachten.

Der Einfluss der zufälligen Fehler der Vergleichungen des Pendels mit der Uhr, ergiebt, nach den im 5. Art. vorkommenden Angaben, den mittleren Fehler der aus jedem Versuche abgeleiteten Schwingungszeit:

Kugel von Messing .. {langes Pendel .... $0^{s}00000111$
{kurzes —— 0,00000033

Kugel von Elfenbein {langes Pendel 0,00000609
{kurzes —— 0,00000105

Hieraus folgt der mittlere Fehler der Länge des gleichzeitig schwingenden einfachen Pendels:

Kugel von Messing .. {langes Pendel .... $0^{L}00168$
{kurzes —— 0, 00029

Kugel von Elfenbein {langes Pendel 0, 00923
{kurzes —— 0, 00093

und der mittlere Fehler des aus jeder Bestimmung abgeleiteten Werthes von ε, für die Messingkugel $= 0^{L}00044$, für die Elfenbeinkugel $= 0^{L}00237$. Das mittlere Resultat der 11 ersten Bestimmungen hat also den mittleren Fehler $0^{L}00013$, das der 4 letzten $0^{L}00119$; der aus dieser Ursache hervorgehende mittlere Fehler des Endresultats, nach der Elimination von k, ist $= 0^{L}00035$.

Der Einfluss der Fehler der Vergleichungen der beiden Uhren ist schwer zu schätzen, weil die Abweichungen der beobachteten Coincidenzen derselben, nicht von den Beobachtungsfehlern allein, sondern auch von den Ungleichheiten im Gange der Uhren, namentlich der vor dem Pendelapparate [**57**] aufgestellten herrühren. Dasselbe gilt von dem Einflusse der Fehler der astronomischen Beobachtungen auf den Gang der Hauptuhr. Allein es ist nicht wahrscheinlich, dass diese Ursachen im Endresultate, welches auf vielen von einander unabhängigen Zeitbestimmungen beruht, einen einigermassen erheblichen Einfluss behalten haben; denn der mittlere Fehler jeder einzelnen ist, wenn er sich auch nicht bestimmt angeben lässt, ohne Zweifel sehr klein. Für noch kleiner, und sogar für ganz unmerklich halte ich den Einfluss der Fehler in der Messung der Höhenunterschiede der Kugel, indem diese sich wirklich mit bewundernswürdiger Genauigkeit ausführen lässt.

Dagegen glaube ich, dass man noch besser übereinstimmende Beobachtungen erhalten haben würde, wenn die vor dem Pendelapparate aufgestellte Uhr nicht oft, im Laufe eines Tages, ihren Gang merklich geändert hätte, so dass der Werth ihrer Pendelschläge, vorzüglich bei grosser Wärme, in der Zwischenzeit weniger Stunden, um mehrere Einheiten der 6. Decimale variirte; denn man kann nicht annehmen, dass die befolgte Regel, die Bestimmung des Ganges dieser Uhr, für das Zeitmoment zu machen, auf welches die Mitte der Versuche fällt, den Einfluss der Unregelmässigkeit ganz vernichtet hat. Den grössten Einfluss hat aber vielleicht das, zuweilen starke, Zunehmen der Temperatur mit der Höhe, welches, durch die Annahme, dass es den Höhenunterschieden selbst proportional sei, wahrscheinlich nicht ganz unschädlich geworden ist.

Indessen gehören alle diese Fehler zu den zufälligen, und ich glaube, dass die Beobachtungen oft genug wiederholt sind um sie ziemlich unschädlich zu machen. Constant wirkende Fehler, welche nicht vermieden worden wären, sind mir unbekannt, ausser der möglichen Unsicherheit in der angenommenen Wärmeausdehnung der Toise. Wenn man die Zusammenstellung der bei verschiedenen Temperaturen der Toise gemachten Bestimmungen, welche ich im vorigen Artikel gegeben habe, betrachtet, so sieht man, dass durch eine von der angewandten *Borda*-schen verschiedene Annahme der Ausdehnung, nämlich durch 0,00001167 statt 0,0000114 für jeden Centesimalgrad des Thermometers, die Fehler noch kleiner werden würden; allein auch dieses hat keinen erheblichen Einfluss auf das Endresultat, indem die mittlere Temperatur der Versuche mit der Kugel von Messing auf 11°,54 C., und mit der Kugel von Elfenbein auf 4°,01 C. fällt, wodurch die Temperatur der Toise, welche dem Endresultate, nach der Elimination der **[58]** unbekannten Grösse k, zum Grunde liegt, = 13°,60 wird und also nur 2°,65 niedriger ist als die Normaltemperatur der Toise. Unter der Voraussetzung dass der den Pendelversuchen am besten entsprechende Werth der Ausdehnung der wahre ist, ist die Länge der Toise für 13°,60 um 0,'''00064 zu gross berechnet worden, also die gefundene Länge des Secundenpendels auch, und zwar um 0,'''0003 zu gross.

Zweiter Abschnitt.

Vergleichung der Bestimmung der Pendellänge für Königsberg mit anderen, und Untersuchung verschiedener, bei den Pendelversuchen zu berücksichtigender Umstände.

23.

Herr Generallieutenant *von Müffling* und Herr *Arago* haben ein unveränderliches, von Herrn *Fortin* verfertigtes Pendel von Messing, im Jahre 1818, in Paris, beinahe an demselben Orte schwingen lassen, wo *Borda* seine, durch scharfsinnige Anordnung der Methode und durch Genauigkeit ihrer Ausführung, berühmt gewordenen Versuche machte. Dieses Pendel hatte Herr Generallieutenant *von Müffling* die Güte, mir anzuvertrauen, und ich habe dadurch eine Vergleichung des Resultats von *Borda*, so wie des späteren der Herren *Biot* und *Arago*, mit dem meinigen, zu erhalten gesucht.

Die Beobachtungen mit diesem Pendel in Paris hat Herr *Anger*, nach derselben Methode, welche ich bei meinen Versuchen angewandt habe, neu berechnet. Es sind 4 Reihen von Coincidenzen, deren erste und letzte Herr *Arago* mit beobachtete, und woraus sich die Schwingungszeiten dieses Pendels, auf unendlich kleine Winkel bezogen, folgendermassen ergeben:

	Schwingungszeit. M. Z.	Baromet.	Thermometer.	Temperatur des Pendels.
1818 April 16	0^s,9907283	0^m,7432	11°,45	11°,50
17	0,9907370	0, 7379	12, 2	12,17
18	0,9907119	0, 7394	12,0	12,05
18	0,9907199	0, 7406	12,15	12,15

[59] Um diese Schwingungszeiten auf den leeren Raum zu reduciren, muss man sie, nach dem 13. Artikel, mit

$$\sqrt{\left\{\frac{\mu + ss}{s} \cdot \frac{s\left(1 - \frac{m'}{m}\right)}{\mu + \frac{m'}{m} K + ss}\right\}}$$

multipliciren, oder wenn mau $(\mu + ss)k$ für K schreibt und das Quadrat von $\frac{m'}{m}$ vernachlässigt, mit

$$1 - \frac{m'}{2m}(1 + k),$$

wo k also den zu diesem Pendel gehörigen unbekannten Coefficieuten bezeichuet. Nimmt man das Peudel 6388 Mal dichter an als atmosphärische Luft bei der Barometerhöhe von 0,^{m}76 und der Temperatur des schmelzenden Eises, und die Ausdehnuug des Metalls für jedeu Ceutesimalgrad des Thermometers = 0,0000178, beide nach der Mittheilung des Herru Generallieutenants *von Müffling*, so folgen die Schwingungszeiten im leereu Raume und bei der Temperatur 0°:

$$\begin{aligned} &0{,}^s9905543 - 0{,}0000726 . k\\ &0{,}9905578 - 0{,}0000719 . k\\ &0{,}9905336 - 0{,}0000721 . k\\ &0{,}9905406 - 0{,}0000722 . k. \end{aligned}$$

Die Gewichte dieser Versuche, welche verschiedene Anzahleu von Coincidenzen, nicht in ununterbrochener Reihe, euthalteu, siud deu Zahleu

181, 428, 62, 88,

proportional: mit Berücksichtigung derselbeu ist das mittlere Resnltat:

$$0{,}^s9905529 - 0{,}0000721 . k.$$

Auf der Königsberger Sternwarte wurde dieses Pendel, unmittelbar neben dem Apparate, worauf meiue Bestimmung beruht, aufgestellt. Da aber die Umstände der Pariser Aufstellung mir uicht so genau bekannt wareu, dass ich die völlige Gleichheit hätte wieder hervorbringen können, so zog ich eiue Beobachtungsart vor, welche der im 5. Artikel beschriebenen ganz ähnlich ist, so dass das Pendel sich, 8 Fuss von der Uhr entfernt bewegte. Auf diese Art beobachtete ich im August und September 1826, bei sehr [**60**] hoher Temperatur, 6 Reihen, jede von 21 Coincidenzen; im November, als die Temperatur weit niedriger war, ersuchte ich die Herren Dr. *Erman* und *Anger*, noch 6 ähnliche Versuche zu machen, so dass das mittlere Resultat der hiesigen Beobachtnngen fast genau zn der Temperatur gehört, bei welcher die Schwingungszeit in Paris bestimmt wurde. Diese 12 Versuche, geben uach der Berechuung des Herru *Anger* folgende Resnltate:

1826	Schwingungs-Zeit. M. Z.	Barometer.	Thermomet.	Temperatur d. Pend.	Schwingungszeit im leeren Raume für 0° Temperatur.	Beobachter.
Aug. 25	$0^{s},9905001$	$339^{\prime\prime\prime},25$	$+23^{\circ},7$	$21^{\circ},29$	$0^{s},9902404$ $-0,0000720.k$	*Bessel.*
25	0,9905084	340, 56	22,7	21,21	0,9902492 $-0,0000723.k$	—
26	0,9905061	340, 43	23,8	21,58	0,9902437 $-0,0000722.k$	—
26	0,9905018	340, 43	21,6	20,80	0,9902461 $-0,0000724.k$	—
28	0,9905012	338, 78	23,3	21,59	0,9902391 $-0,0000718.k$	—
Sept. 1	0,9905053	338, 59	22,8	21,88	0,9902407 $-0,0000717.k$	—
Nov. 9	0,9903891	332, 70	7,7	7,32	0,9902503 $-0,0000744.k$	*Anger.*
10	0,9903852	332, 55	7,1	7,37	0,9902458 $-0,0000744.k$	—
11	0,9903694	334, 50	5,7	5,84	0,9902427 $-0,0000752.k$	—
13	0,9903643	333, 37	4,5	4,53	0,9902490 $-0,0000754.k$	*Erman.*
14	0,9903554	333, 79	4,9	4,86	0,9902372 $-0,0000754.k$	—
15	0,9903613	333, 09	4,2	4,39	0,9902473 $-0,0000753.k$	*Anger.*

Das mittlere Resultat ist

$$0,9902443 - 0,0000735.k$$

und es folgt hieraus die Schwere in Königsberg, die in Paris $= 1$ gesetzt,

$$= \left\{\frac{0,9905529 - 0,0000721.k}{0,9902443 - 0,0000735.k}\right\}^2$$
$$= 1,0006234 + 0,0000028.k.$$

Um auch die Schwere in London mit der in Paris zu vergleichen, habe ich die Versuche angewandt, welche die Herren *Biot*, *Arago*, und *von Humboldt*, mit zwei unveränderlichen Pendeln in Paris und auf der Greenwicher Sternwarte angestellt haben. Diese Versuche haben im Mittel ergeben:

		Zahl der Schwingungen in einem Tage.	Baromet.	Thermomet.	Schwingungszeit.
Pendel Nr. 1	Paris	87671,785	0,ᵐ7568	10°,675	0ˢ,9854938
	Greenwich	87685,358	0, 7602	7, 975	0,9853412
Pendel Nr. 2	Paris	87030,794	0, 7533	14, 505	0,9927521
	Greenwich	87044,195	0, 7632	8, 850	0,9925992

[61] Reducirt man die Schwingungszeiten auf den leeren Raum und auf die Temperatur des schmelzenden Eises, unter Anwendung derselben Zahlen für die Dichte und Ausdehnung des Pendels, welche ich oben benutzt habe, so erhält man:

Pendel Nr. 1 {Paris . . . . $0^s,9853265 - 0,0000737.k$
Greenwich $0,9851965 - 0,0000784.k$

Pendel Nr. 2 {Paris . . . . $0,9925596 - 0,0000731.k$
Greenwich $0,9024456 - 0,0000754.k$

und hieraus die Schwere in Greenwich, die in Paris = 1 gesetzt

Pendel Nr. 1 = $1,0002679 + 0,0000023.k$
Pendel Nr. 2 = $1,0002315 + 0,0000047.k$

also das mittlere Resultat dieser Versuche:

$$= 1,0002497 + 0,0000035.k.$$

Da die Erhöhung über die Meeresfläche, für die Sternwarte in Greenwich nicht angegeben ist, so muss die Schwere von dort nach Herrn *Kater*s Beobachtungsorte, ohne Rücksicht darauf übertragen werden; man erhält dadurch für den letzteren Ort

$$1,0002533 + 0,0000035.k.$$

Aus der Verbindung beider Bestimmungen folgt die Schwere in Königsberg, die in London = 1 gesetzt, wenn man für alle 3 Pendel k gleich annimmt,

$$= \frac{1,0006234 + 0,0000028.k}{1,0002533 + 0,0000035.k} = 1,0003701 - 0,0000007.k.$$

Für das unbekannte k habe ich, indem es für ein Pendel von der Construction der verglichenen, wahrscheinlich kleiner ist als für eine Kugel, den Werth $\frac{3}{4}$ gesetzt, und dadurch die 3 beobachteten Pendellängen auf Königsberg übertragen:

	Beobachtete Pendellänge	für Königsberg.
Borda	$440{,}^{L}5593$	$440{,}^{L}8349$
Biot und *Arago*	440, 5674	440, 8430
Kater	440, 6872	440, 8501

Diese Pendellängen sind sämmtlich grösser als die von mir bestimmte; die erste um $0{,}^{L}0202$; die andere um $0{,}^{L}0283$, die dritte um $0{,}^{L}0354$. Man [62] darf aber nicht übersehen, dass die Richtigkeit dieser Unterschiede auf der ungeprüften Voraussetzung beruht, dass das Pendel wodurch die Schweren in Paris und Königsberg vorglichen worden sind, in der Zwischenzeit dieser Vergleichungen unverändert geblieben sei. Die Bemerkung des Herrn *Sabine*, welche er aus seiner grossartigen, auf Anordnung des *Board of Longitude* ausgeführten Unternehmung gefolgert hat, dass nämlich die auf die Meeresfläche reducirten Pendellängen, seiner Formel*) nahe folgen, wenn die geologische Beschaffenheit der Beobachtungsörter gleich ist, könnte einiges Misstrauen gegen die Richtigkeit dieser Voraussetzung erregen. Denn da die geologische Beschaffenheit von London und Königsberg nahe gleich zu sein scheint, und die auf die Meeresfläche bezogene Pendellänge am ersteren Orte $= 440{,}^{L}6896$, mittelst der *Sabine*schen Formel auf Königsberg übertragen, $440{,}^{L}8117$ ergiebt, und diese um $0{,}^{L}0062$ kleiner ist als ich sie gefunden habe, so zeigt sich zwischen der Uebertragung durch die unveränderlichen Pendel und der Formel, ein Unterschied von $0{,}^{L}0416$, welcher grösser ist als ihn Herr *Sabine*, bei gleichen geologischen Verhältnissen irgendwo gefunden hat.

Indessen geht aus dieser Uebertragung nicht der wirkliche Unterschied der früheren Bestimmungen und der neueren hervor, weil jene nicht die vollständige Reduction auf den leeren Raum erhalten haben. Für die Versuche der französischen Geometer und Astronomen wird sich die Reduction nachholen lassen, wenn eine neue Reihe von Versuchen, mit einer leichteren Kugel von derselben Grösse der dabei angewandten Kugel von Platina, hinzugefügt wird. Will man, um eine vorläufige Uebersicht zu erhalten, denselben Werth des Coefficienten k annehmen, welchen ich für eine Kugel von grösserem Durchmesser gefunden habe, so wird man die aus dieser Ursache entstehende Ver-

*) In Pariser Linien $= 439{,}^{L}2975 + 2{,}^{L}28174$ (Sin. Polhöhe)^2.

grösserung der in Paris bestimmten Pendellängen etwa = 0,ᴸ025 finden, wodurch dieselben, nach der Vergleichung durch die unveränderlichen Pendel, 0,ᴸ045 und 0,ᴸ053 grösser werden, als die in Königsberg beobachtete. Ueberträgt man dagegen die Pariser Pendellängen durch die Vergleichungen der unveränderlichen Pendel auf London, und von da durch die Formel auf Königsberg, so findet man das ihnen hinzuzufügende:

[63]	Verbesserung wegen der Luft	+ 0,ᴸ0250
	Reduction auf London	+ 0,1127
	Reduction auf die Meeresfläche daselbst ..	+ 0,0024
	Unterschied zwischen London und Königsberg, nach *Sabine*'s Formel	+ 0,1221
		+ 0,2622

und hiermit wird die erste Bestimmung für Paris 0,ᴸ0036, die andere um 0,ᴸ0117 grösser, als in Königsberg beobachtet worden ist. Diese nahe Uebereinstimmung ist jedoch nicht eher anzunehmen, als bis die Anwendbarkeit des von mir gefundenen Werths von k, auf eine Kugel von kleinerem Durchmesser, durch Versuche geprüft, und die Uebertragung von Paris nach Königsberg durch unveränderliche Pendel bestätigt sein wird, denn die schon vorhandene ähnliche Uebertragung giebt das vorher angeführte, stark abweichende Resultat.

Die Verbesserung des *Kater*schen Resultats nach der neuen Theorie über die Einwirkung der Luft, kann, nach unserer jetzigen Kenntniss dieses Gegenstandes, nicht ohne neue Versuche gefunden werden. Wie man aber, bei der Anwendung eines Pendels mit reciproken Axen, diese Schwierigkeit ganz vermeiden kann, werde ich unten zeigen.

24.

Alles was ich im vorigen Artikel gesagt habe, beruht auf der Ansicht, welche ich über die Einwirkung der Luft aufgestellt habe. Da aber die bisherige Theorie von dem unsterblichen *Newton* herrührt, und spätere Geometer an ihrer Richtigkeit nicht gezweifelt haben, so hielt ich für nothwendig, die neue, ehe ich sie auf die Pendelversuche anwandte, durch Experimente zu prüfen, welche den Zweck hatten, die Richtigkeit oder Unrichtigkeit der *Newton*schen Theorie ins Licht zu setzen. Ich

liess daher, im October 1827, verschiedene Körper in Wasser nnd in Luft schwingen, und führe die Resultate davon hier an.

Es ist bekannt, dass ein in Wasser schwingender Körper, durch den Widerstand welchen er erfährt, sehr bald zur Ruhe kömmt; aus diesem Grunde können die Beobachtungen nur geringe Genauigkeit erlangen. Allein wenn die Genauigkeit der Schwingungszeit bis auf etwa ein Tausendtheil [**64**] einer Secunde, hinreichend ist, so wird ihre Beobachtung leichter als es auf den ersten Blick erscheint. Ich habe, um Resnltate von dieser Annäherung zn erhalten, zwei Verfahrungsarten brauchbar gefunden. Die erste besteht darin, dass man die Secunden der Uhr nnunterbrochen fortzählt, nnd z. B. bei jeder 10. oder 12. derselben, den Bruch der Schwingnng anmerkt, welcher diesen Pendelschlägen entspricht; die ganzen Schwingungen werden später hinzugefügt. Nach der zweiten werden diejenigen Secunden der Uhr angemerkt, welche mit gerade vollendeten Schwingungen des Pendels zusammentreffen; dieses zweite Verfahren scheint den Vorzug zu verdienen, wenn die Schwingnngszeiten von 1^s, 2^s,.... wenig verschieden sind.

Die Pendel mit welchen diese Versuche gemacht worden siud, wurden sämmtlich ausser dem Apparate aufgehängt, so dass sie in die Mitte eines runden Wassergefässes von 3 Fuss Durchmesser und 10 Zoll Höhe trafen; die Schwingungswinkel fingen bei etwa 2° an, und endigten sich bei den kleinsten, welche noch gehörig gesehen werden konnten.

1. Das lange Pendel mit der Kugel von Messing machte eine Schwingung in etwas weniger als 2 Secunden, weshalb ich das zweite Verfahren anwandte, nnd aus 2 Reihen von Schwingungen, jede 10 Mal wiederholt, die Zeiten der Coincidenzen folgendermaassen fand:

Coincidenz.	Secunden.	
0	$0^s,0$	$0^s,0$
1	22,5	21,9
2	45,5	43,6
3	65,8	66,7
4	88,9	89,3
5	112,1	111,1
6	133,5	132,9
7	153,0	153,8
8	176,5	176,1
9	198,9	198,3

Coincidenz.	Secunden.	
10	221,3	——
11	240,9	——
12	265,6	——
13	287,1	——

Die erste Reihe giebt, nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt, den wahrscheinlichsten Werth der Zwischenzeit zweier Coincidenzen [65] = 22ˢ,003, die zweite = 22ˢ,033. Das Mittel aus beiden ergiebt die Schwingungszeit des Pendels

$$= \frac{2 \,.\, 22{,}018}{23{,}018} = 1^s{,}9131 \text{ Uhrz.} = 1^s{,}9085 \text{ M. Z.}$$

Die Schwingungszeit desselben Pendels in der Luft war 1ˢ,7217 M. Z.

2. Das kurze Pendel mit derselben Kugel, ergab, in 2 Reihen, jede 10 Mal wiederholt, folgende Schwingnngen:

Secunden.	Schwingungen.	
0	0,00	0,00
12	10,82	10,81
24	21,63	21,57
36	32,44	32,39
48	43,26	43,17
60	54,10	54,02
72	64,89	64,80
84	75,69	75,61
96	86,53	86,41
108	97,28	97,26
120	108,10	108,05

Aus der ersten Reihe folgt die Schwingungszeit = 1ˢ,1100, aus der zweiten = 1ˢ,1104; das Mittel also = 1ˢ,1102 Uhrzeit = 1ˢ,1078 M. Z.; in der Luft war sie = 1ˢ,0020 M. Z.

Um diese Versuche zu berechnen hat man, wenn Δ, Δ', Δ'' die Dichtigkeiten der Pendelkugel, des Wassers und der Luft bezeichnen, und $\Delta\delta'$, $\Delta\delta''$ für Δ', Δ'' geschrieben werden, nach dem 13. Artikel

$$\lambda\, tt \,.\, s\,(1-\delta') = \mu + \delta' \,.\, K + ss$$
$$\lambda\, t't' \,.\, s\,(1-\delta'') = \mu + \delta'' \,.\, K + ss.$$

Schreibt man $(\mu + ss)$ für K, so folgt hieraus, unter der Voraussetzung, dass der Werth von K für Wasser und Luft gleich

sei, welche, wegen der geringen Dichtigkeit der Luft, keinen bei diesen Versuchen in Betracht kommenden Fehler erzeugen kann,

$$k = \frac{tt\,(1-\delta') - t't'\,(1-\delta'')}{\delta' t't'\,(1-\delta'') - \delta'' tt\,(1-\delta')}.$$

Für diese beiden Versuche ist $\varDelta' = 8{,}18955$; $\varDelta' = 0{,}99990$; $\varDelta'' = 0{,}00126$, und es folgt damit aus dem ersten Versuche $k = 0{,}648$, aus dem zweiten 0,602. [66] Um beide übereinstimmend zu machen, dürfte man die Schwingungszeit des kurzen Pendels in Wasser nur um 0ˢ0029 vermehren, was mit den Hindernissen, welche sich bei diesem Versuche der Genauigkeit entgegensetzen, wohl vereinbar zu sein scheint.

3. An die Pendel wurde, statt der Kugel, ein hohler Cylinder von Messing, von 36 Linien Höhe und 32 Linien Durchmesser gehängt, welcher eben so schwer ist als die Kugel, dessen specifische Schwere aber nur 2,0788 beträgt. Mit dem langen Pendel wurde folgendes beobachtet:

Secunden.	Schwingungen.	
0	0,00	0,00
10	3,52	3,56
20	7,10	7,13
30	10,66	10,69
40	14,20	14,28
50	17,81	17,88
60	21,36	21,42
70	24,95	24,98
80	28,51	28,57
90	32,10	32,15
100	35,66	35,77

Hieraus folgt die Schwingungszeit = 2ˢ7947 und 2ˢ7972, im Mittel = 2ˢ7960 Uhrzeit = 2ˢ7892 M. Z.; in der Luft war sie = 1ˢ7244 M. Z.

4. Am kurzen Pendel aufgehängt, machte derselbe Hohlcylinder folgende Schwingungen:

Secunden.	Schwingungen.	
0	0,00	0,00
12	7,27	7,28
24	14,60	14,56
36	21,88	21,86

Secunden.	Schwingungen.	
48	29,21	29,18
60	36,56	36,46
72	43,84	43,76
84	51,17	51,06
96	58,50	58,39

woraus man für die Schwingungszeit 1ˢ,6406 und 1ˢ,6442 erhält; im Mittel 1ˢ,6424 Uhrzeit = 1ˢ,6385 M. Z.; in der Luft fand ich 1ˢ,0104 M. Z.

Diese beiden Versuche gaben, nach der bei den vorigen, angeführten Formel berechnet, $k = 0,747$ und $0,761$ und zeigen daher, wenn man sie [**67**] mit der vorigen Bestimmung vergleicht, einen merklichen Einfluss der Figur des schwingenden Körpers.

5. Um diesen Einfluss aber noch viel grösser an den Tag zu legen, nahm ich aus dem Hohlcylinder, mit welchem die beiden vorigen Versuche gemacht worden sind, den ihn unten verschliessenden Boden heraus, wodurch er die specifische Schwere des Metalls selbst, etwa = 8.3 erhielt. Wenn die Figur keinen Einfluss hätte, so hätte der Cylinder nun nahe wie die Kugel schwingen müssen; allein er machte am langen Pendel folgende Schwingungen:

Secunden.	Schwingungen.
0	0,00
10	3,86
20	7,72
30	11,66
40	15,52
50	19,40
60	23,27
70	27,17
80	31,05
90	34,97
100	38,84

woraus die Schwingungszeit = 2ˢ,5737 Uhrzeit = 2ˢ,5675 M. Z. folgt; in der Luft war sie = 1ˢ,7199 M. Z.

6. Derselbe Cylinder ohne Boden, bewegte sich am kurzen Pendel folgendermassen:

Secunden.	Schwingungen.	
0	0,00	0,00
10	6,61	6,56
20	13,23	13,26
30	19,84	19,88
40	26,50	26,55

Hieraus geht die Schwinguugszeit = $1^{s}5099$ und $1^{s}5056$ hervor; im Mittel = $1^{s}5078$ Uhrzeit = $1^{s}5042$ M. Z.; in der Luft war sie = $1^{s}0019$ M. Z.

Diese beiden Versuche ergeben $k = 7,99$ und $8,21$, woraus also ein sehr grosser Einfluss der Figur des schwingenden Körpers hervorgeht. Die [68] Wassertheile sind gezwungen worden, mehr Bewegung anzunehmen als in den vorigen Fällen, weil hier ein leer werdender Raum an der äusseren Seite des Cylinders, durch das Wasser im Innern ersetzt werden musste, oder umgekehrt.

Vergleicht man dieselben 6 Versuche mit der bisherigen Theorie, so erhält man die Schwingnngszeit im Wasser = t, aus der in der Luft = t', nach der Formel

$$t = t'\sqrt{\frac{1-\delta''}{1-\delta'}}.$$

		Rechnung.	Beobachtung.
Kugel von Messing .	langes Pendel	$1^{s}8373$	$1^{s}9085$
	kurzes ——	1,0693	1,1078
Hohlcylinder	langes ——	2,3928	2,7892
	kurzes ——	1,4021	1,6385
Hohlcylinder ohne Boden	langes ——	1,8339	2,5675
	kurzes ——	1,0683	1,5042

Man sieht also, dass jene Theorie mit den Versuchen nicht übereinstimmt. Hätte *Newton*, bei den Versuchen, welche er über die Abnahme der Schwingungswinkel in Wasser und Quecksilber anstellte, die Schwingungszeiten angemerkt, so hätte ihm die Unzuläuglichkeit der Theorie nicht entgehen können.

Endlich liess ich noch ein Pendel mit reciproken Axen, welches ich unten näher beschreiben werde, und welches in der Luft um beide Axen gleichzeitige Schwingungen von $1^{s}0002$ M. Z. machte, in einem hohen Gefässe voll Wasser, so dass das

Pendel ganz davon überdeckt wurde, schwingen. Wenn das grosse Gewicht unten war, war die Schwingungszeit = 1ˢ,1177 M. Z., wenn es oben war = 1ˢ,1450; die Gleichzeitigkeit der Schwingnngen ging also verloren, was man auch erwarten musste.

Vergleicht man den aus der Bewegung der Kugel von Messing in Wasser hervorgehenden Werth von k, mit dem aus der Vergleichnng der Schwingungen dieser Kugel und der gleich grossen von Elfenbein, im 21. Artikel gefolgerten, so sieht man, dass derselbe weit kleiner ist, als der in der Luft stattfindende, etwa im Verhältnisse 2 : 3. Hierans geht hervor, dass man die zur Reduction der Pendelversuche nothwendige Kenntniss von K nicht [**69**] aus Schwingungen des Pendels in einer tropfbaren Flüssigkeit ableiten darf. Auch erinnere ich, dass das Resultat, dass die Wirkung der Flüssigkeit nur das Moment der Trägheit vermehrt, nur für Flüssigkeiten von geringer Dichte allgemein erwiesen worden ist.

25.

Da durch das was ich im 13. Artikel gesagt habe, die Möglichkeit einer, von der bisherigen Theorie verschiedenen Einwirkung der Flüssigkeiten auf die Bewegung der Körper klar wird, und alle Versnche, welche ich angeführt habe, das was die Hydrodynamik hier noch unentschieden lässt, dahin entscheiden, dass die stets dnrch k bezeichnete Grösse keineswegs unerheblich ist, so halte ich die von der bisherigen verschiedene Reduction der Pendelbeobachtungen, welche ich angewandt habe, für gerechtfertigt, und werde nun die Resultate anderer Prüfungen angeben, welche ich über die Bewegung der Pendel vorgenommen habe.

Den Einfluss der cylindrischen Figur der Schneiden eines Pendels hat zuerst Herr *Laplace* erkannt und entwickelt. Die theoretische Untersuchung desselben beruht auf der Annahme, dass die cylindrische Schneide, bei der Bewegung des Pendels, auf der untergelegten Ebene rollt, und dass die Ebene diesem Rollen kein Hinderniss in den Weg legt. Man bemerkt leicht, dass die Breite der cylindrischen Abstumpfung einer Schneide allein nicht hinreichend ist, den Einfluss der Abstumpfung auf die Schwingungszeit zu geben; dieser hängt vielmehr, wie auch die Herren *Biot* und *Arago* bemerkt haben, von der Krümmung desjenigen Theils der Schneide ab, welcher nach und nach mit

den Ebenen in Berührnng kömmt, und welcher, bei kleinen Schwingungswinkeln, so wie sie bei den Versuchen zur Bestimmung der Pendellängen vorzukommen pflegen, immer sehr klein ist. Wäre z. B. der Krümmungshalbmesser ein Zehntel einer Linie, so würde die Abstumpfung der Schneide, bei einer ganzen Schwingungsweite von $2\frac{1}{2}^{\circ}$, welches die grösste, bei Herrn *Kater*s Versuchen vorkommende ist, nnr ein Bogen des Cylinders von 0,1 Linie Halbmesser von $2\frac{1}{2}^{\circ}$ sein, oder eine Breite von $0^{L},0043$ haben dürfen, um einen Einfluss von einem Zehntel einer Linie auf die Pendellänge erhalten zu können. Bemerkt man aber wirklich eine Abstumpfung von dieser Breite, so werden doch alle optischen Hülfsmittel den Halbmesser ihrer Krümmung nnsicher lassen, nnd man wird nicht im Stande [70] sein, sich völlig zu versichern, ob nicht diese kleine Abstumpfung einen bedeutenden Einfluss auf die Pendellänge erlangt. Dieses Beispiel zeigt, dass es der Mühe werth ist, den Einfluss der Abstumpfung der Schneiden genauer zu erörtern, als bisher geschehen ist.

Ueber die Figur des Cylinders, welcher die Schneiden begrenzt, kann als bekannt vorausgesetzt werden, dass die abgeschliffenen Ebenen des Prismas, welches die Schneiden bildet, Berührungsebenen an dieselbe sind, oder, wenn der Winkel dieser Ebenen durch $2i$ bezeichnet wird, dass Tangenten an die Grenzen der Cylinderflächen gezogen, den Winkel $2i$ einschliessen: ferner kann man die Entfernung der Ebenen, da wo sie mit der Cylinderfläche zusammentreffen, als bekannt annehmen, indem sie mikroskopisch messbar ist; ich werde sie durch b bezeichnen. Die Krümmnng der Oberfläche bleibt aber unbekannt und man mnss sie in der Rechnung willkürlich lassen. Ich habe darüber angenommen, dass der auf die Axe des Cylinders senkrechte Durchschnitt desselben, ein Kegelschnitt sei, dessen eine Axe mit der des Pendels znsammenfällt; seine Figur ist dann durch i, b und eine willkürliche Excentricität, welche ich durch ε bezeichnen werde, gegeben. Durch die Aenderung der letzteren geht der Cylinder von der mit den Ebenen des Prismas zusammenfallenden Hyperbel, also von einer Winkelspitze, durch alle Zwischenstufen hindurch, in eine auf die Axe des Pendels senkrecht stehende Ebene über.

Diese Annahme habe ich in der IX. Beilage durch Rechnung verfolgt und führe hier die Resultate davon an. Wenn man die Länge des einfachen Pendels, mit welchem das sich auf der cylindrischen Schneide bewegende, gleiche Schwingungszeit

hat, durch l' bezeichnet; die Länge eines zweiten einfachen Pendels, welches mit dem Schneidenpendel gleiche Zeit halten würde, wenn dieses sich um den Scheitelpunkt der Schneide drehete, durch l, so findet sich

$$l' = l - \frac{l}{s} \cdot b \cdot q$$

wo s die Entfernung des Schwerpunkts von der Schneide, und q eine von der Figur des Cylinders und dem Schwingungswinkel abhängige Quantität ist.

Der Werth von q, für unendlich kleine Schwingungen, ist

$$= \frac{\sqrt{(1 - \varepsilon \cos i^2)}}{2 \cos i};$$

[71] für $\varepsilon = \operatorname{Sec} i^2$ verwandelt der Kegelschnitt sich in eine Winkelspitze, und q wird $= 0$, so wie b willkürlich; von Sec i^2 bis 1 ist der Kegelschnitt eine Hyperbel; für 1 eine Parabel; zwischen 1 und 0 eine Ellipse mit aufrecht stehender grossen Axe; für 0 ein Kreis; zwischen 0 und $-\infty$ eine Ellipse mit aufrechter kleinen Axe. Durch diesen Uebergang von ε von Sec i^2 bis $-\infty$ wird q immer grösser, und für den letzten Werth sogar unendlich gross, was mit dem gänzlichen Aufhören der unendlich kleinen Schwingungen in diesem Falle übereinstimmt. Ist aber der halbe Schwingungswinkel u' nicht unendlich klein, so hat q die Grenze

$$\frac{2}{\pi \sin u'}.$$

Für sehr grosse Werthe von ε nimmt q schnell ab, wenn die Schwingungswinkel wachsen; für kleinere ist es von dem Werthe, welchen es für unendlich kleine Schwingungen hat, wenigstens bei den Winkeln, bei welchen man Pendelversuche anzustellen pflegt, nicht mehr merklich verschieden. Damit man dieses vollständiger übersehen könne, habe ich für einige Werthe von ε, und für $u' = 0$, 1°, 2°, den Werth von q, nach Anleitung der IX. Beilage, berechnet, und in folgende zwei Tafeln gebracht, deren erste für $2i = 90^\circ$ gilt, die andere für $2i = 120^\circ$; dieser letzte Winkel fand bei Herrn *Katers* Versuchen statt.

Winkel $i = 45^\circ$.

ε	Natur des Kegel-schnitts.	Axen-verhältniss.	Werthe von q. $u' = 0$	$u' = 1^\circ$	$u' = 2^\circ$
+ 2	Hyperbel	....	0	0	0
+ 1	Parabel.	....	0,50	0,50	0,50
0	Kreis...	1 : 1...	0,71	0,71	0,71
— 10	Ellipse .	1 : 3,32	1,73	1,73	1,72
— 100	——...	1 : 10,05	5,05	4,99	4,84
— 1000	——...	1 : 31,64	15,83	14,30	11,58
— 10000	——...	1 : 100,00	50,00	28,38	16,68
— 100000	——...	1 : 316,23	158,11	34,94	18,00
— ∞	Ebene..	1 : ∞	∞	36,48	18,24

[72] Winkel $i = 60^\circ$.

ε	Natur des Kegel-schnitts.	Axen-verhältniss.	Werthe von q. $u' = 0$	$u' = 1^\circ$	$u' = 2^\circ$
+ 4	Hyperbel	....	0	0	0
+ 1	Parabel.	....	0,87	0,87	0,87
0	Kreis...	1 : 1...	1,00	1,00	1,00
— 10	Ellipse .	1 : 3,32	1,87	1,87	1,86
— 100	——...	1 : 10,05	5,10	5,04	4,88
— 1000	——...	1 : 31,64	15,84	14,32	11,59
— 10000	——...	1 : 100,00	50,01	28,38	16,68
— 100000	——...	1 : 316,23	158,12	34,94	18,00
— ∞	Ebene..	1 : ∞	∞	36,48	18,24

Diese Tafeln geben nnr den von der Lage des Schwerpnnkts des Pendels nnabhängigen Theil des vollständigen, in der IX. Beilage entwickelten Ansdrucks von q; der andere ist nnbedentend.

Wenn die Voraussetzung worauf diese Rechnung gegründet ist, nämlich dass die cylindrische Schneide auf den Ebenen wirklich rollt, wahr ist, so zeigen diese Tafeln, dass die Figur der Schneide einen merklichen Einfluss auf die Pendellängen haben kann, selbst wenn die Abstumpfung b nur einige Tausendtheile einer Linie beträgt. Wenn nicht ein genügender Grund vorhanden ist anznnehmen, dass grosse negative Werthe von ε, oder sehr stark abgeplattete Ellipsen mit horizontaler grossen Axe, bei der Operation des Abschleifens der Schneiden, oder durch die Abnutzung derselben durch den Gebrauch, nicht entstehen

können, so wird man diese Ursache als die Qnelle einer so grossen Unsicherheit ansehen müssen, dass man nicht wagen darf, die Bestimmung der Pendellänge auf einen Apparat mit Schneiden zu gründen, ehe man Mittel gefunden hat, den Fehler entweder zu bestimmen, oder ans dem Resnltate zu eliminiren.

Es ist in der That behauptet worden, dass der Einfluss der Cylindricität der Schneiden, ans dem Resnltate der Beobacbtnngen mit einem Pendel von Herrn *Bohnenbergers* Erfindnng verschwinde; allein diese sehr elegante Eigenschaft eines solchen Apparats findet nur statt, wenn beide Schneiden dnrch gleiche Cylinder begrenzt sind. Setzt man dieses nicht voraus, die beobachteten Schwingungszeiten nm beide Scbneiden aber als gleich, so hat man für die eine

$$l' = l - \frac{l}{s}\, bq;\quad l = \frac{\mu + ss}{s};$$

[73] für die andere

$$l' = l_{,} - \frac{l_{,}}{s_{,}}\, b_{,}q_{,};\quad l_{,} = \frac{\mu + s_{,}s_{,}}{s_{,}};$$

und wenn man l, $l_{,}$, μ eliminirt,

$$l' = s + s_{,} - \frac{s + s_{,}}{s - s_{,}}\,(bq - b_{,}q_{,}).$$

Also ist die Länge des gleichzeitig schwingenden einfachen Pendels, nnr dann der Entfernung der Scheitel der cylindrischen Schneiden gleicb, wenn bq und $b_{,}q_{,}$ gleich sind. Es ist aber ein leichtes Mittel vorhanden, den Einfluss der Cylindricität ganz zu eliminiren: man richtet das Pendel so ein, dass die Schneiden mit einander verwechselt werden können, und macht die Versuche sowohl vor als nach der Verwecbselung. Dadurch kömmt der Fehler, in gleicher Grösse auf entgegengesetzte Seiten, nnd das Mittel ist frei davon.

26.

Es ist bekannt, dass Herr *Biot* die Einwirknng der Cylindricität ganz bezweifelt hat, indem er bemerkt, dass das Pendel nicht mit der ganzen Schneide, sondern nur mit einzelnen hervorstehenden, als unendlicb klein zn betrachtenden Pnnkten auf der Ebene aufliege, und sich bei der Schwingung um diese drehe. Man könnte noch hinzufügen, dass eine der Voraussetzungen



der Rechnung, nämlich die der völligen Härte der Unterlagen, nie mit mathematischer Strenge erfüllt wird, indem dieselben immer mehr oder weniger elastisch sind. Indessen können diese Bemerkungen uns über eine Fehlerquelle nicht völlig beruhigen, deren sehr grosser Einflnss anf die Versuche, der Rechnung zufolge, möglich ist; deren Nichtvorhandensein aber durch directe Beweise dargethan werden müsste, ehe man die Sicherheit von Versuchen, auch wenn sie nicht durch ihre Anordnung davon befreit sind, behaupten kann.

Es schien mir also nothwendig, Versuche über die Einwirkung der Figur der Schneiden anzustellen. Dieses geschah mit einem Pendel mit reciproken Axen, welches ans einer cylindrischen Stange von Messing, von 5,1 Linien Dnrchmesser und 635 Linien Länge, mit einem festen grösseren und einem beweglichen kleineren Gewichte besteht. Wenn das grössere Gewicht unten ist, das kleinere oben, so ist die obere Schneide 96,4 Linien vom oberen [**74**] Ende der Stange entfernt, die untere 97,6 Linien vom unteren Ende; das grosse Gewicht ist ein Cylinder von Messing von 36,7 Linien Dnrchmesser und 3,9 Linien Höhe, und die auf die Stange senkrechte Axe desselben ist 58,6 Linien unter der unteren Schneide. Das kleine Gewicht ist dann über der oberen Schneide, und wurde, bei den Versuchen, welche ich mit diesem Apparate machte, so befestigt, dass sein Mittelpnnkt 64,3 Linie von derselben entfernt war, wodurch die Schwingungszeiten um beide Schneiden nahe gleich wurden. In diesem Zustande fand ich die Entfernung der einen Schneide vom Schwerpunkte = 305,32 Linien, der anderen = 135,70 Linien, so dass die Entfernung beider durch den Schwerpnnkt im Verhältnisse 9 : 4 getheilt wurde. Die Schneiden von Stahl sind ziemlich nahe im rechten Winkel abgeschliffen, der Figur und dem Gewichte nach gleich und so eingerichtet, dass man sie leicht herausnehmen, und, dem Zwecke des Apparats gemäss, diejenigen Aenderungen ihrer Abstumpfung vornehmen kann, über deren Einwirkung auf die Schwingungszeit Versuche gemacht werden sollen. Die Unterlage der Schneiden waren die zu dem unveränderlichen Pendel von *Fortin* gehörigen Agatebenen. Das Gewicht des Pendels fand ich = 34260 Gran.

Die Beobachtungen mit diesem Apparate wnrden nach der im 5. Artikel beschriebenen Methode gemacht; da sie aber auf das eigentliche Resultat dieser Abhandlung keinen Einfluss haben, so glanbe ich die Anführung derselben in ihrer ursprünglichen Form unterlassen, und nur die aus jedem Versnche her-

ansgebrachte Schwingnngszeit für unendlich kleine Winkel, mittheilen zu dürfen.

Wenn man die Schneiden heransnimmt nm ihre Schärfe durch neues Anschleifen zu verändern, so wird nur dann eine Aenderung der Schwingungszeit darans hervorgehen, wenn der Werth von bq dadurch verändert worden ist; in sofern man also nicht Mittel anwendet, welche dieses Product bestimmt ändern, wird das neue Anschleifen oft keinen merklichen Einfluss äussern. Ich kann daher nicht alle Versuche, welche ich gemacht habe, zur Bestätignng des wirklichen Einflusses der Abstumpfung anf die Schwingungszeit anführen, sondern nnr diejenigen derselben welche diesen Einflnss zeigten. Die Form, nnter welcher ich die Versuche mittheilen werde ist folgende: zuerst wird die beobachtete mittlere Zeit t einer Schwingung für unendlich kleine Winkel, nebst dem Stande des Barometers und daran befindlichen Thermometers angegeben; dann die Temperatur des Pendels τ; ferner die **[75]** anf den leeren Raum und die Temperatur 0 bezogene, entsprechende einfache Pendellänge l', in der Voranssetznng der Länge des einfachen Secundenpendels $= 440{,}^{l}8147$, nnd der Ansdehnung des Messings $= 0{,}0000178$ für 1^{0} C., berechnet. Der nnbekannte Coefficient, welcher die Einwirknng der Luft bestimmt, ist, je nachdem das grosse Gewicht unten oder oben ist, dnrch k und k' bezeichnet.

Am 13. December 1826, als das grosse Gewicht oben war, wurde folgender Versnch gemacht:

$$t = 1{,}^{s}0001093. \quad 340{,}^{l}38 + 3{,}^{0}2. \quad \tau = 2{,}^{0}95.$$
$$l' = 440{,}^{l}8185 - 0{,}^{l}0694 . k'.$$

Daranf wurde die Schneide heransgenommen nnd so fein geschliffen als mir möglich war; am folgenden Tage fand sich damit:

$$t = 1{,}^{s}0001651. \quad 339{,}^{l}34 + 3{,}^{0}0. \quad \tau = 3{,}^{0}07.$$
$$l' = 440{,}^{l}8668 - 0{,}^{l}0694 . k'.$$

Allein dnrch das Herausnehmen nnd Wiedereinsetzen der Schneide, war sie, wie ich durch eine mikroskopische Messnng fand, um $0{,}^{l}006$ dem Schwerpunkte näher gekommen, wodurch l', nach der oben angegebenen Lage des Schwerpunkts des Pendels, nm $0{,}^{l}0075$ vergrössert worden ist. Der Unterschied beider Versuche ist daher $= 0{,}^{l}0408$, und zeigt, dass das Product bq dnrch die Aendernng der Schneide, um $0{,}^{l}0125$ verkleinert worden ist.

Ein zweites Beispiel giebt eine, durch fortgesetzten Gebrauch einer Schneide erzeugte Aenderung zu erkennen. Am 16. December 1826 war das grosse Gewicht unten, und die Schneide war sehr fein, vermuthlich feiner als es nach der Härte ihres Stahls hätte sein sollen, angeschliffen; in diesem Zustande des Pendels wurde folgender Versuch gemacht:

$$t = 1^{s}{,}0001505. \quad 338^{l}{,}66 + 2^{\circ}{,}7. \quad \tau = 2^{\circ}{,}64.$$
$$l' = 440^{l}{,}8572 - 0^{l}{,}0695 . k.$$

Nach dieser Beobachtung wurde das Pendel zu verschiedenen Versuchen angewandt, von welchen ich später reden werde, und nach der Beendigung derselben, am 14. und 15. Februar 1827, wurden folgende Versuche damit gemacht:

$$t = 1^{s}{,}0000984. \quad 331^{l}{,}80 - 1^{\circ}{,}0. \quad \tau = -\ 0^{\circ}{,}78.$$
$$t = 1{,}0000787. \quad 334{,}39 - 1{,}3. \quad\quad -\ 2{,}20.$$
$$l' = 440^{l}{,}8387 - 0^{l}{,}0689 . k$$
$$= 440{,}8316 - 0{,}0689 . k.$$

[**76**] Die Veränderung der entsprechenden einfachen Pendellänge ist daher gleich — $0^{l}{,}0220$; allein im Februar fand sich die Schneide $0^{l}{,}006$ entfernter vom Schwerpunkte als im December, welches vermuthlich von einer durch die erwähnten Versuche entstandenen, auch später beim Herausnehmen der Schneide sichtbaren Abnutzung berührt. Diese vergrösserte Entfernung, hätte l' um $0^{l}{,}0033$ vergrössern müssen, wenn bq denselben Werth behalten hätte; die beobachtete Veränderung beträgt daher — $0^{l}{,}0253$, und es folgt daraus eine Vergrösserung von $bq = 0^{l}{,}0173$. Die abgenutzte Schneide schien mir, unter einem 200 Mal vergrössernden Mikroskop, eine Abstumpfung von $0^{l}{,}005$ zu haben.

Diese beiden Erfahrungen scheinen mir hinreichend, zu zeigen, dass die Figur der Schneide wirklich die Schwingungszeiten ändern kann; ich hätte noch einige andere anführen können, welche aber nicht so entschieden wie diese, die möglichen Grenzen der Beobachtungsfehler überschreiten. Allein man kann eine viel grössere Wirkung der Abstumpfung hervorbringen, wenn man darauf ausgeht, die Krümmung der Abstumpfung sehr klein zu machen. Um eine Bestätigung dieses Resultats der Rechnung durch Versuche zu erhalten, schliff ich die Schneide durch eine Glasplatte, welche, soviel ohne besonders dazu eingerichteten Apparat thunlich war, stets senkrecht auf der den Winkel der Ebenen des Prismas bissectirenden Ebene

erhalten wurde. Die Breite der dadurch entstandenen Abstumpfung, fand ich, mit den *Pistor*schen Mikroskopen, im Mittel aus Messungen an 10 verschiedenen Punkten $= 0^{L},0216$; die Entfernung der Schneide vom Schwerpunkte war jetzt $0^{L},021$ grösser als am 16. December 1826, für welchen Tag oben $l' = 440^{L},8572 - 0^{L},0695\,k$ bestimmt worden ist; jetzt hätte also sein Werth $= 440^{L},8689 - 0^{L},0695\,k$ sein sollen, wenn der Zustand der Schneide übrigens nicht verändert worden wäre. In diesem Zustande des Pendels beobachtete Herr Dr. *Erman* am 16. Februar eine Reihe von Coincidenzen, welche ich mit den dazu gehörigen Schwingungswinkeln anführe, weil die aus jedem einzelnen Intervalle geschlossene, nach der gewöhnlichen Formel auf unendlich kleine Winkel reducirte Schwingungszeit entschieden kleiner wurde so wie die Schwingungswinkel abnahmen.

[77] u'	t		τ	l'		Einfluss der Abstumpfung.
von 98,'1 bis 69,'0	$0^{s},9997649$	$334^{L},80 - 2^{0},0$	$-2^{0},03$	$440^{L},5539$	$-0^{L},0966\,k$	$-0^{L},3150$
69, 0 - 52, 6	7633		$-2,01$	5524		$-0,3165$
52, 6 - 40, 8	7594		$-2,00$	5489		$-0,3200$
40, 8 - 29, 2	7619		$-2,00$	5511		$-0,3178$
29, 2 - 22, 4	7509		$-1,99$	5413		$-0,3276$
22, 4 - 17, 0	7407		$-1,97$	5321		$-0,3368$
17, 0 - 13, 3	7255		$-1,94$	5185		$-0,3504$

Der hier beobachtete Einfluss der Abstumpfung ist $= -\frac{l}{s} \cdot bq$ $= -\frac{13}{9} \cdot bq$; $b = 0^{L},0216$ angenommen ergiebt sich daraus q:

u'	q
83,'6	10,1
60, 8	10,1
46, 7	10,2
35, 0	10,2
25, 8	10,5
19, 7	10,8
15, 2	11,2

Dieser Versuch wurde, einige Tage später, mit der Abänderung wiederholt, dass die Ebenen der Schneide vorher abgeschliffen wurden, so dass die Breite der Abstumpfung dadurch bis auf $0^{L},0135$ im Mittel, vermindert wurde. Als die Schneide wieder

befestigt war, fand sie sich $0{,}^{L}019$ entfernter vom Schwerpunkte als am 16. December, weshalb der Werth von l' jetzt $= 440{,}^{L}8678 - 0{,}^{L}0695\,k$ hätte sein sollen. Die Coincidenzen wurden von Herrn *Anger* beobachtet;

u'	t		τ	l'		Einfluss der Abstumpfung.
von 90,'0 bis 69,'3	$0{,}^{s}9998555$	335,94 — 3,94	$-3{,}^{0}92$	$440{,}^{L}6475$	$-0{,}^{L}0706.k$	$-0{,}^{L}2203$
69, 3 - 56, 0	8478		— 3,75	6393		— 0,2285
56, 0 - 44, 8	8373		— 3,63	6292		— 0,2386
44, 8 - 36, 3	8370		— 3,54	6282		— 0,2396
36, 3 - 29, 9	8300		— 3,47	6214		— 0,2464
29, 9 - 24, 5	8368		— 3,43	6271		— 0,2407
24, 5 - 20, 4	8210		— 3,39	6129		— 0,2548

Da b hier $= 0{,}^{L}0135$ ist, so erhält man die den einzelnen Intervallen entsprechenden Werthe von q:

[78]

u'	q
79,'7	11,2
62, 7	11,7
50, 4	12,2
40, 6	12,2
33, 1	12,6
27, 2	12,3
22, 5	13,0

Diese Versuche, verglichen mit der ersten Tafel des 25. Artikel, zeigen, dass wenn man die Abstumpfung als eine Ellipse betrachtet, das Axenverhältniss etwa 1 : 21 und 1 : 25 angenommen werden muss, welche Annahmen nichts Unwahrscheinliches haben, aber, da man die Krümmung so kleiner Flächen nicht messen kann, auch nicht direct bestätigt werden können; die Zunahme des Einflusses bei kleinen Schwingungswinkeln, stimmt nahe genug mit der Theorie überein.

27.

Obgleich diese Versuche, übereinstimmend mit der oben gegebenen Entwickelung der Theorie, zeigen, dass Grund vorhanden ist, auf die Vermeidung des Einflusses der Cylindricität der Schneiden mehr Gewicht zu legen, als bisher geschehen ist, so sieht man doch wohl, dass ihr Einfluss auf die Versuche des

Herrn *Kater*, wenn nicht ganz nnmerklich, doch sehr gering gewesen sein muss. Denn die grosse Vorsicht welche dieser, eben so anfmerksame als erfindnngsreiche Beobachter auf die feine Bearbeitung und gnte Erhaltnng der Schneiden wandte, so wie die Güte des zn denselben benntzten Stahls, lassen eine nur sehr geringe, wahrscheinlich ein Tansendtheil einer Linie nicht erreichende Abstumpfung erwarten, deren Einfluss, wenn sie für beide Schneiden gleich war, verschwinden, wenn sie ungleich war, nach dem 25. Artikel, nnr znm Theil auf das Resnltat übergehen mnsste.

Die Herren *Biot* und *Arago* haben ihre Versuche mit zwei Schneiden gemacht, deren eine eine sehr breite Abstumpfung, die andere eine weit geringere hatte; für jene war $b = 0^{L},0166$, für diese $= 0^{L},0023$. Dennoch stimmen die mit beiden erhaltenen Resnltate überein. Nach dem was ich über die Abstnmpfung der Schneiden angeführt habe, mnss ich gestehen, dass mir diese Uebereinstimmung mehr zufällig als nothwendig erscheint. Bei [**79**] dem letzten der im vorigen Artikel angeführten Versnche, war die Breite der Abstumpfung kleiner als bei dem ersten der beiden französischen Pendel; dennoch würde ihr Einfluss auf dasselbe etwa $0^{L},16$ gewesen sein. Wenn er aber nicht so gross, sogar nnmerklich gefunden wnrde, so liegt dieses also in der Art der Krümmnng, von welcher es überhaupt wahrscheinlich ist, dass sie die Grenze nicht durch Zufall erreicht, welche man ihr durch Absicht geben kann. Es scheint daher dass man das zuverlässigste Resultat aus der in dem *Recueil d'Observations* enthaltenen denkwürdigen Operation ziehen wird, wenn man die Versnche mit der feineren Schneide allein nimmt, nnd die mit der gröberen nur znr Uebertragung der Pendellänge von einem Orte zum anderen anwendet. Das Maximnm des Einflnsses der Abstnmpfnng der feineren Schneide auf die Länge des Secnndenpendels, welches sich mit den bei grösseren und kleineren Schwingungswinkeln angestellten Beobachtnngen noch vereinigen lässt, würde etwa $0^{L},029$ sein; allein es ist, wie gesagt, gar nicht wahrscheinlich, dass diese Grenze anch nnr annäherungsweise erreicht werden sollte.

Der Fehler welchen dieselbe Ursache bei der *Borda*schen Bestimmnng hervorgebracht haben kann, ist, weil das Pendel viermal so lang war als das Secnndenpendel, nnr ein Viertel der Grösse von bq. Man darf aber nicht unbemerkt lassen, dass *Laplace* erst lange nach *Borda*'s Tode auf diese Fehlerursache aufmerksam machte, so dass man nicht sicher ist, ob *Borda* alle

Aufmerksamkeit angewandt hat, sie zu vermeiden; ferner dass jener grosse Geometer anführt, die Begrenzung der Schneide sei ein Halbcylinder, dessen Radius ein Hunderttheil eines Millimeters überschreite, woraus hervorzugehen scheint, dass diese allgemein ausgesprochene Wahrnehmung, wenn nicht an *Borda*'s Schneide selbst gemacht, doch, nach *Laplace*'s Meinung, mit dieser vereinbar ist. Muss man aber eine Abstumpfung der Schneide von 0,01 Linie für wahrscheinlich, dagegen den andern Theil der Angabe, dass die Schneide einen Halbcylinder bilde, wegen Unzulänglichkeit eines Vergrösserungsglases zur Beurtheilung des Krümmungshalbmessers einer so kleinen Fläche, für nicht hinreichend begründet halten, so scheint man nicht mit Sicherheit behaupten zu können, dass der Einfluss der Abstumpfung der Schneide auf *Borda*'s Resultat ganz unmerklich sei. Vielleicht ist *Borda*'s Schneide noch unverändert vorhanden, in welchem Falle es nicht schwer werden wird, durch eine neue Reihe von Versuchen mit [**80**] einem weit kürzeren Pendel, dieser höchst ausgezeichneten Operation entweder die Bestätigung zu verschaffen, oder die ihr anzubringende Verbesserung zu finden.

28.

Hier muss ich auch der Versuche erwähnen, welche ich in der Absicht gemacht habe, zu bestimmen, wie sich die Mittelpunkte der Bewegung der drei, im 18. Artikel beschriebenen Aufhängungsarten der Pendel an meinem Apparate, gegen die Aufhängungspunkte selbst verhalten.

Es ist dazu nöthig, die Entfernung der Ebene am Aufhängungsrahmen, auf welcher die Schneide, die Klemme und der Abwickelungscylinder ruhen, von dem Nullpunkte der Mikrometervorrichtung am unteren Ende des Pendelapparats, oder vielmehr die durch F bezeichnete Constante, unmittelbar zu messen. Wenn man den Apparat durch eine Einrichtung zu dieser Messung vermehrt, so ergiebt er nicht nur den Unterschied der beiden Pendellängen, sondern auch die Längen beider Pendel selbst. Indem aber die aus dem Unterschiede gefolgerte Länge des einfachen Secundenpendels, von der Einwirkung der Aufhängungsart auf den Mittelpunkt der Bewegung frei ist, so wird durch die Vergleichung derselben mit der Länge eines der beiden Pendel, diese Einwirkung bekannt. Man sieht, dass der

so vermehrte Apparat eigentlich eine dreifache Bestimmung der Länge des Secnndenpendels gewährt, sowohl aus der gemessenen Länge des kurzen Pendels, als ans der des langen (welche die Summe der vorigen und der Toise ist) und aus dem Unterschiede beider Längen. Die letzte allein ist aber frei von jeder Unsicherheit über den Mittelpnnkt der Bewegnng und eben so von dem Halbmesser und der Voranssetzung der Gleichförmigkeit der Materie der Kugel.

Herr *Repsold* hatte die Güte, mir eine Einrichtung zur Messung der Constante F zu verfertigen. Dieses ist eine Stange von Stahl von 453 Linien Länge; auf ihre obere polirte, ebene Fläche wird ein Cylinder von Stahl von 1 Linie Durchmesser und 3 Linien Länge, durch eine starke Feder aufgedrückt, welcher dann über beide Seiten der Stange hervorragt; die Dicke der Stange ist nicht grösser als die Weite des Einschnitts der Ebene, auf welcher die Schneide, die Klemme und der Abwickelungscylinder ruhen, so dass sie, mittelst des über ihre beide Seiten hervorstehenden Cylinders, an derselben Ebene aufgehängt werden kann, wodurch ihr oberes Ende mit [**81**] dieser Ebene zusammenfällt. Mit dem unteren, abgerundeten Ende, trifft diese Stange, wenn der Aufhängnngsrahmen so aufgelegt ist wie bei dem Gebranche des knrzen Pendels, auf die Stahlplatte am Fühlhebel. Ihr Gewicht ist dem Gewichte der Pendelkugel von Messing gleich, so dass der Aufhängungsrahmen bei den Versuchen mit dem Pendel und bei der Messung, eine gleiche Spannung erfährt.

Nach der Anknnft dieser Einrichtung ersnchte ich Herrn *Anger*, vier Reihen von Coincidenzen mit dem knrzen Pendel, mit der Schneide und der Kugel von Messing zu beobachten, zwischen welchen sowohl der Faden, als der Fühlhebel umgekehrt wurden; die Messungen an der Mikrometerschraube und die Vergleichungen der Uhren übernahm ich selbst. Vor und nach diesen Versnchen wnrde die Messstange angewandt.

Diese vier Versuche habe ich nicht im Originale mitgetheilt, theils weil das Maass der Genauigkeit der Coincidenz-Beobachtungen aus den früheren hinreichend bekannt ist nnd Herr *Anger* hier wenigstens denselben Erfolg erhalten hat; theils weil sie keinen Einfluss auf das Hauptresultat dieser Abhandlung haben. Ich führe also hier nur die Schwingungszeiten für unendlich kleine Winkel und die übrigen, zur Rechnung nothwendigen Data an:

1827 Nov.	Schwingungs-Zeit. M. Z.	Barometer.		Temperatur von F.	Schraube des Fühlhebels.
22	1,0001360	334,01	+ 2,5	+ 3,26	19,294
23	1,0001399	333, 56	+ 2,8	+ 3,44	19, 294
23	1,0001098	331, 56	+ 2,4	+ 2,89	19, 5505
26	1,0001125	338, 86	+ 2,4	+ 2,96	19, 527

Die Messungen an der Schraube des Fühlhebels ergeben:

Gemessene Länge $= F$	— 1,7403	— 1,7403	— 1,7635	— 1,7613
Temperatur von F	+ 0,0176	+ 0, 0186	+ 0, 0156	+ 0, 0160
Elasticität des Fadens ..	+ 0,0014	+ 0, 0014	+ 0, 0014	+ 0, 0014
Länge des Pendels $= F$	— 1,7213	— 1, 7203	— 1, 7465	— 1, 7439

Die Berechnung der Schwingszeiten, unter Voraussetzung der Länge des einfachen Secundenpendels = 440,81 + ε, und des im 21. Artikel bestimmten Werthes von k, geben folgende Resultate: [82]

Länge des entsprechenden einfachen Pendels	440,9299	440,9333	440,9068	440,9092
Reduction auf den leeren Raum	— 0, 1332	— 0, 1329	— 0, 1323	— 0, 1353
— auf das zusammengesetzte Pendel	— 0, 0535	— 0, 0535	— 0, 0535	— 0, 0535
— auf F	+ 1, 7213	+ 1, 7203	+ 1, 7465	+ 1, 7439
Resultat des Versuchs $F =$	442, 4645	442, 4672	442, 4675	442, 4643

Die Reduction auf das zusammengesetzte Pendel ist mit dem Gewichte des Fadens = 3,64 Gran, übrigens aber mit denselben Elementen berechnet, welche für das Pendel mit der Schneide, in der VII. Beilage, angewandt worden sind.

Als die Messstange aufgehängt war, ergab die Messung mit der Mikrometerschraube, im Mittel aus häufigen, immer fast vollkommen übereinstimmenden Beobachtungen:

Schraube des Fühlhebels.	e'	e''	l'	l''
18,069	3,56	3,64	3,53	3,60

Für die Temperatur dieser Messung ist die Constante $= F$ + 0,0197; diese, um die Angabe der Mikrometerschraube

$= 1^{L}{,}6298$ vermindert, und um den Halbmesser der Pendelkugel für $3^{\circ}{,}53$ Temperatur ($= a$) vermehrt, ist die Länge der Messstange für $\frac{1}{2}\{3^{\circ}{,}53 + 3{,}60\} = 3{,}565$ Temperatur ($= b$). Man erhält also

$$F = b - a + 1^{L}{,}6101.$$

Um die Länge b zu bestimmen, habe ich die Toise auf eine horizontale Ebene gelegt und die Messstange anf dieselbe, so dass das obere Ende derselben mit einer der Endflächen der Toise zusammenfiel, welches man dnrch einen geraden, an das Ende der Toise angedrückten Cylinder, an welchen anch die Stange angeschoben wird, erlangt: dann habe ich auf das untere, abgerundete Ende der Stange, eins der *Pistor*schen, zur Prüfung der Theilungen des Meridiankreises bestimmten Mikroskope eingestellt, und, ohne die Toise zu verrücken, diese Operation am anderen Ende derselben wiederholt, so dass ein zweites dieser Mikroskope den nunmehrigen Ort des unteren Endes der Stange angab. Auf diese Art erhielten die Mikroskope eine Entfernung, welche dem Ueberschusse der doppelten Länge der Stange über die Länge der Toise, gleich war, und welche nun auf einer, von den [**83**] Herren *Pistor* und *Schiek* in Berlin verfertigten, auf in Messing eingelegtes Silber schön getheilten Scale, durch die Schraube des einen der Mikroskope gemessen wurde. Im Mittel aus mehreren Wiederholnngen ergab sich dieser Ueberschuss $= 41^{L}{,}9973$ bei der Temperatur $= 4^{\circ}{,}04$ C. Für diese Temperatur ist die Länge der Toise $= 863^{L}{,}8790$; der gemessene Ueberschuss ist, da die Scale ihre wahre Länge bei der Normaltemperatur der Toise erlangt $= 41^{L}{,}9882$; also ist die Länge der Stange für dieselbe Temperatur $= 452^{L}{,}9336$, und wenn man die Ansdehnung 0,0000114 für jeden Grad des Thermometers annimmt, $b = 452^{L}{,}9311$.

Der Halbmesser der Kugel ist zwar in der VII. Beilage, durch das Gewicht des Wassers, welches sie ans dem Wege drängt $= 12^{L}{,}082$ bestimmt worden; allein da er hier einen directen Einfluss anf das Resultat erlangt, so habe ich ihn unmittelbar gemessen. Dieses geschah dadurch, dass in die Ebene von Holz auf welcher die Toise lag, eine Vertiefnng von 10 Linien gemacht wurde, an deren einen Rand ich ein eben und rechtwinklicht geschliffenes, etwas über 2 Linien dickes Stück Messing so befestigte, dass sowohl die Kugel als die Toise an dasselbe angeschoben werden konnten; auf die Toise wurde die Scale von *Pistor* und *Schiek* befestigt und die Grösse der Verschiebung durch ein Mikroskop gemessen. Hierdurch erhielt

ich den Durchmesser der Kugel, in der Temperatur $3^\circ,90$ = $24^L,1619$; da die Scale und die Kugel aus demselben Metalle bestehen, so ist dieses ihr wahrer Durchmesser für die Normaltemperatur der Toise, und man erhält den für $3^\circ,53$ stattfindenden = $24^L,1564$ oder $a = 12^L,0782$.

Demzufolge ist $F = 442^L,4630$; nach der Bestimmung durch die Pendelschwingungen ist es im Mittel = $442^L,4659 + 1,0002 . \varepsilon$; setzt man, für ε seinen aus dem 20. Artikel bekannten Werth = $+ 0^L,0047$, so wird es = $442^L,4706$, und die Vergleichung beider Bestimmungen ergiebt den Mittelpunkt der Bewegung des Pendels $0^L,0076$ über der Ebene, auf welcher die Schneide ruhete. Dieser Unterschied mag zum Theil aus den Fehlern der in diesem Artikel beschriebenen Operation entstanden sein, vielleicht auch aus der Voraussetzung, dass der Schwerpunkt und der Mittelpunkt der Kugel zusammenfallen, welche, durch Umkehren der Kugel, hätte unschädlich gemacht werden müssen; wenn die Bestimmung der Pendellänge aus Versuchen mit einem Pendel hätte abgeleitet werden sollen; man sieht aber daraus, dass dieser Versuch keinen Grund giebt anzunehmen, dass eine so schön [**84**] gearbeitete Schneide wie die von Herrn *Repsold*, womit diese Versuche gemacht worden sind, den Mittelpunkt der Bewegung merklich zu tief gebe. Hierdurch wird das bestätigt, was ich über die Einwirkung der cylindrischen Figur der Schneiden auf Herrn *Kater*'s Bestimmung gesagt habe. Es geht übrigens aus diesem Versuche hervor, dass die Beobachtungen, welche ich gemacht habe, aus beiden Pendeln einzeln genommen, nahe dasselbe Resultat gegeben haben würden, welches aus ihrem Unterschiede folgt. Dass aber sowohl der Abwickelungscylinder als die Klemme, den Mittelpunkt der Bewegung (Art. 18 und 19) um einige Hunderttheile einer Linie zu tief ergeben, ist nicht mehr zu bezweifeln.

29.

In dem Werke des Herrn *Sabine* findet sich eine Bemerkung, welche grosse Aufmerksamkeit verdient, indem sie auf die Richtigkeit der Bestimmungen der absoluten Pendellänge neue Zweifel wirft. Er liess nämlich seine beiden unveränderlichen Pendel sowohl auf denselben Agatebenen schwingen, welche Herr *Kater* zu seinen Versuchen gebraucht hatte, als auch auf den zu diesen Pendeln selbst gehörenden: obgleich kein Unterschied unter diesen Ebenen sichtbar war, so machte doch eins der Pendel

auf seinen eigenen Ebenen, täglich 1,46 Schwingungen mehr, als auf den *Kater*schen; das andere zeigte diesen Unterschied (welcher mit 0,ˡ015 in der Länge des Secundenpendels correspondirt) nicht. Die ausgezeichnete Uebereinstimmung aller Versuche von *Sabine* lässt keinen Zweifel über die Wirklichkeit des Unterschiedes; dennoch fand er, unter dem Anscheine nach ganz gleichen Umständen, bei dem zweiten Pendel nicht statt. Es war daher keine Hoffnung vorhanden, seine Ursache, durch Versuche auf verschiedenen Ebenen von derselben Materie, zu entdecken; allein es schien der Mühe werth, das im 26. Artikel beschriebene Pendel auf Unterlagen von sehr verschiedener Härte und Politur schwingen zu lassen, weil sich dadurch weit grössere Unterschiede ergeben konnten, von welchen dann einiger Aufschluss über die Natur und den Einfluss dieser Einwirkung zu erwarten war. Ich machte daher Versuche auf Ebenen von Agat, von mattgeschliffenem Glase und von Stahl, auf Glascylindern und auf Ebenen und Cylindern von Messing. Alle diese Versuche wurden mit beiden Schneiden des Pendels [85] wiederholt; die meisten Coincidenzen sind von Herrn *Anger* beobachtet. Die Form ihrer Mittheilung ist die bereits im 26. Artikel angewandte.

Die auf den härteren Unterlagen — von Agat, mattgeschliffenen Glasplatten, Glasröhren von 42 Linien Durchmesser, und sehr harten Stahlebenen — gemachten Versuche werde ich zuerst anführen:

1) Grosses Gewicht unten:

1826 Dec.		t	Barometer.		τ	l'
16	Agatebenen	1,ˢ0001505	338,ˡ66	+ 2°,7	+ 2°,64	440,ˡ8572 — 0,0695 . k
21	Glasebenen	1,0001436	334, 17	+ 2,0	+ 1,86	440, 8580 — 0,0687 . k
19	Glasröhren	1,0001510	337, 73	+ 2,0	+ 2,56	440, 8585 — 0,0692 . k
1827 Apr.						
19	Agatebenen	1,0002455	337, 82	+ 12,4	+ 12,01	440, 8700 — 0,0668 . k
21	Dieselben	1,0002455	335, 24	+ 13,1	+ 12,34	440, 8680 — 0,0662 . k
20	Stahlebenen	1,0002459	337, 65	+ 13,7	+ 12,57	440, 8662 — 0,0666 . k
20	Dieselben	1,0002364	336, 45	+ 12,1	+ 11,73	440, 8644 — 0,0666 . k

2) Grosses Gewicht oben:

		t	Barometer.		τ	l'
1826 Dec.						
16	Agatebenen	1,0001387	338,68	+ 2,7	+ 2,40	440,8488 — 0,0694 . k'
21	Glasebenen	1,0001316	333,96	+ 2,2	+ 2,08	440,8458 — 0,0686 . k'
19	Glasröhren	1,0001299	337,84	+ 2,0	+ 2,16	440,8428 — 0,0694 . k'
1827 Apr.						
19	Agatebenen	1,0001908	337,79	+ 12,9	+ 12,12	440,8210 — 0,0668 . k'
21	Dieselben	1,0001817	335,20	+ 13,7	+ 12,51	440,8105 — 0,0662 . k'
20	Stahlebenen	1,0001825	337,55	+ 13,8	+ 12,71	440,8092 — 0,0666 . k'
20	Dieselben	1,0001807	336,35	+ 12,3	+ 11,78	440,8149 — 0,0666 . k'

Der Zustand des Pendels bei den drei ersten Versuchen blieb derselbe; eben so bei den vier letzten; zwischen beiden Reihen wurde er aber verändert. Die Versuche zeigen keine entschiedene Einwirkung der Unterlagen auf die Schwingungszeiten des Pendels, welche selbst bei den Glasröhren, welche von den Schneiden nur in einem Punkte berührt werden, den Werth behalten haben, den sie auf den übrigen Unterlagen hatten. Vielleicht wäre, aus öfterer Wiederholung der Versuche, ein kleiner mittler Unterschied hervorgegangen; allein seine Auffindung schien mir kaum ein Interesse zu haben, da man aus der Erfahrung des Herrn *Sabine* schon weiss, dass dergleichen Unterschiede auch vorkommen können, wenn die verschiedenen Unterlagen von gleicher Materie sind.

[**86**] Ganz verschieden zeigten sich aber die Schwingungszeiten, als die Schneiden auf Ebenen von gehämmertem Messing gelegt wurden, deren Oberflächen abgeschliffen, aber nicht polirt waren. Auf diesen Unterlagen wurden folgende Versuche gemacht.

1) Grosses Gewicht unten:

		t	Barometer.		τ	l'
1826 Dec. 20	Messing-ebenen	1,0001124	335,58	+ 2°,1	+ 1°,96	440,8299 — 0,0689.k
1827 Oct. 7	Agatebenen	1,0002979	337,80	12,7	12,43	440,9133 — 0,0664.k
7	Messing-ebenen	1,0002751	337,52	13,3	12,85	440,8901 — 0,0662.k
9	Agatebenen	1,0003135	334,86	15,8	14,16	440,9145 — 0,0654.k
10	Messing-ebenen	1,0002709	334,86	15,8	14,67	440,8730 — 0,0653.k

2) Grosses Gewicht oben:

		t	Barometer.		τ	l'
1826 Dec. 20	Messing-ebenen	1,0000619	335,52	+ 2°,0	+ 2°,18	440,7833 — 0,0689.k'
1827 Oct. 7	Agatebenen	1,0002433	337,78	12,8	12,62	440,8638 — 0,0663.k'
7	Messing-ebenen	1,0002198	337,40	13,6	13,17	440,8390 — 0,0661.k'
8	Agatebenen	1,0002530	336,31	14,5	13,83	440,8633 — 0,0657.k'
10	Messing-ebenen	1,0001680	334,83	15,8	14,86	440,7810 — 0,0652.k'

Bei dem ersten Versuche, verglichen mit den drei oben angeführten Versuchen auf härteren Unterlagen, zeigt sich ein Einfluss der Messingebenen auf die Länge des gleichzeitig schwingenden Pendels, von — 0,0280 und — 0,0625; der zweite Versuch ergiebt denselben — 0,0238 und — 0,0246; der dritte — 0,0409 und 0,0826. Sie stimmen daher bei weitem nicht so gut überein, als ähnliche Versuche auf härteren Unterlagen, so dass man annehmen kann, dass die Messingebenen die Schwingungszeiten auf eine Art stören, welche von der Verschiedenheit im Auflegen des Pendels, oder von Umständen abhängt, welche man nicht kennt. Indessen geben alle drei Versuche beträchtlich kürzere Schwingungszeiten als die Versuche auf härteren Unterlagen, und der Unterschied ist für die zweite Aufhängung des Pendels grösser als für die erste. Die Abnahme

der Schwingungswinkel war nicht beträchtlich verschieden von der welche sich zeigt wenn man das Pendel auf härteren Unterlagen schwingen lässt; die einzelnen Coincidenzen stimmten eben so gut nntereinander als gewöhnlich, so dass kein Einfluss der Schwingungswinkel bemerkt wurde. Nachdem die Versuche beendigt waren, [**87**] nntersuchte ich die Ebenen, nnd fand bei den beiden ersten, dass die Schneide keinen Einschnitt in dieselben gemacht, sondern nur eine sehr feine, sich von den übrigen Stellen der mattgeschliffenen Flächen dnrch ihren Glanz auszeichnende Linie, hervorgebracht hatte; bei den vier späteren Versuchen war ein sehr feiner Einschnitt sichtbar, dessen Breite aber so gering war, dass ich vergebens versuchte, sie unter dem Mikroskope zu messen. —

Der beträchtliche Einfluss, welchen die Messingebenen auf die Schwingungszeiten des Pendels gehabt haben, liess erwarten, dass man einen noch grösseren erhalten würde, wenn man die Schneiden auf Cylinder von derselben Materie legte. Ich versuchte daher auch diese; allein sie gaben einen so grossen und mit den Schwingungswinkeln so veränderlichen Einfluss, dass es nöthig wird die Versuche im Einzelnen vorzulegen.

Der erste wurde am 18. December 1826 gemacht; die Unterlagen waren Stücke von Messingdraht von 1 Linie Durchmesser, welche aber abgedreht und polirt wurden. Als das grosse Gewicht nnten war, bewegte das Pendel sich folgendermassen:

u'	t		τ	l'	
von 43,'7 bis 34,'2	0,s9998277	339,'32 + 2°,0	+ 2°,04	440,'5772	— 0,0696.k
34, 2 - 26, 0	0,9997884		2,05	5425	
26, 0 - 20, 2	0,9997686		2,08	5248	
20, 2 - 17, 1	0,9997624		2,13	5189	
17, 1 - 13, 7	0,9997535		2,16	5108	

als es oben war:

u'	t		τ	l'	
von 59,'4 bis 32,'5	0,s9995905	339,'32 + 2°,0	+ 2°,12	440,'3676	— 0,0696.k'
32, 5 - 19, 5	0,9994995		2,12	2874	
19, 5 - 13, 7	0,9994446		2,12	2389	

Dieser Versuch wurde am 22. December, mit neuen Messingcylindern von 1,63 Linie Durchmesser wiederholt; er ergab nun für beide Lagen des Pendels,

u'	t		τ	l'	
von 87,′8 bis 63,′5	1,s0000431	337,L31 + 2,°0	+ 2,°00	440,L7663	− 0,0691 . k
63, 5 - 46, 1	1,0000110		2,04	7393	
46, 1 - 34, 8	0,9999771		2,09	7090	
34, 8 - 27, 0	0,9999493		2,14	6841	
27, 0 - 21, 2	0,9999290		2,20	6657	

[88]

u'	t		τ	l'	
von 81,′3 bis 39,′3	0,s9997143	337,L74 + 2,°0	+ 2,°17	440,L4765	− 0,0693 . k′
39, 3 - 22, 9	0,9995826		2,21	3600	
22, 9 - 14, 0	0,9995067		2,25	2928	

Die Stellen der Messingcylinder wo die Schneiden gelegen hatten, wurden unter dem Mikroskope untersucht: es fanden sich Einschnitte deren Breite = 0,L01 bis 0,L013, deren Tiefe aber weit geringer war. Die Abnahme der Schwingungswinkel war weit grösser als auf den härteren Unterlagen, wie die folgende Zusammenstellung der in beiden Versuchen und den früheren beobachteten zeigt:

I.		II.		Härtere Unterlagen.	
u'	Schwingungen.	u'	Schwingungen.	u'	Schwingungen.
43,′7	0	87,′8	0	82, 9	0
34, 2	885	63, 5	802	68, 1	770
26, 0	1787	46, 1	1619	56, 0	1544
20, 2	2698	34, 8	2450	47, 0	2320
17, 1	3612	27, 0	3292	39, 5	3097
13, 7	4530	21, 2	4142	33, 5	3874
				28, 4	4652
				24, 2	5431

u'	Schwingungen.	u'	Schwingungen.	u'	Schwingungen.
59, 4	0	81, 3	0	94, 3	0
32, 5	987	39, 3	929	65, 0	772
19, 5	2025	22, 9	1925	46, 4	1550
13, 7	3095	14, 0	2962	33, 6	2331
				24, 5	3112
				18, 9	3895

Vergleicht man die aus diesen beiden Versuchen hervorgehenden Werthe von l' mit den auf den härteren Unterlagen bestimmten,

so erhält man folgende Einwirkungen der Messingcylinder auf dieselben:

1. Versuch.

u'		u'	
39,'0	$-0\overset{L}{,}2807$	46,'0	$-0\overset{L}{,}4782$
30, 1	— 0, 3154	26, 0	— 0, 5584
23, 1	— 0, 3331	16, 6	— 0, 6069
18, 7	— 0, 3390		
15, 4	— 0, 3471		

2. Versuch.

u'		u'	
75,'7	$-0\overset{L}{,}0916$	60,'3	$-0\overset{L}{,}3693$
54, 8	— 0, 1186	31, 1	— 0, 4858
40, 5	— 0, 1489	18, 5	— 0, 5530
30, 9	— 0, 1738		
24, 1	— 0, 1922		

[**89**] 30.

Man wird gewiss nicht Pendelschwingungen auf weicheren Unterlagen beobachten, während härtere vorhanden sind, also auch nicht Gefahr laufen, so grosse Unsicherheiten in die Resultate zu bringen, als die sind, welche die Anwendung von Messingebenen und Cylindern gegeben hat. Allein dennoch halte ich die auf diesen Unterlagen gemachten Versuche für lehrreich, indem sie die Natur der Einwirkung aufklären. Es scheint zwischen den im December 1826 gemachten Versuchen auf Messingebenen, und denen auf härteren Unterlagen, kein wesentlicher Unterschied zu sein, indem auch jene Ebenen keinen bleibenden Eindruck der Schneide erhielten; der grosse Einfluss derselben wäre dann die Wirkung einer auch bei den härteren Unterlagen stattfindenden, nur bei den Messingebenen stärker hervortretenden Ursache.

Es schien mir daher der Mühe werth, der Natur der Einwirkung der Unterlagen auf die Schneiden noch weiter nachzuspüren, und namentlich durch hinreichend feine Versuche zu entscheiden, ob die Schneiden, wie man immer vorausgesetzt hat, wirklich festliegen, oder ob sie durch die Schwingungen eine kleine Bewegung erhalten. Zu diesen Versuchen wandte

ich eine Vorrichtnng an, welche Fig. 10, Taf. II in halber Grösse abgebildet ist. Das Wesentliche derselben ist eine Rolle von Stahl von 0,85 Linie Halbmesser, an welches ein 36 Linien langer Zeiger, mit einem Gegengewichte für die Schwere desselben versehen, befestigt ist, und welche sich nm einen feinen Zapfen dreht. Wenn diese Rolle nnter die Schärfe der Schneide gedrückt wird, so dass ihre Axe sich nicht bewegen kann, so muss sie eine Drehung annehmen, wenn die Schneide sich bewegt; diese Drehung zeigt der Zeiger 42 Mal vergrössert; allein wenn man gegen denselben ein Mikroskop richtet so wird die Vergrösserung noch weit stärker, und man wird auch im Stande sein, mit einem Mikrometer im Mikroskope, die Ausdehnnng der Bewegnng zu messen. Um die Rolle gegen die Schneide des auf seinen Unterlagen befindlichen Pendels drücken zn können, sind die Löcher für ihren Zapfen an dem knrzen Arme eines Hebels befindlich, welcher sich nm zwei, auf dem Rahmen der Agatebenen oder anderen Unterlagen ruhende scharfe Spitzen dreht, während der lange Arm desselben so belastet ist, dass die Rolle mit einem Gewichte von etwa einer Unze gegen die Schneide [**90**] drückt. Gegen den Zeiger wurde eins der *Pistor*schen Mikroskope gerichtet, indem es, in horizontaler Lage, auf dem Rahmen der Unterlage befestigt wurde; da man damit den tausendsten Theil einer Linie noch dentlich erkennt, so mnsste eine Bewegung der Schneide sichtbar werden, wenn sie auch nur den vierzigtausendsten Theil einer Linie betrug. Es ist klar, dass das Rollen der cylindrischen Schneide anf den Unterlagen, keine Verrückung des Zeigers vernrsachen kann; allein wenn die Schneide nicht gerade, oder vielmehr der die Rolle berührende Pnnkt derselben, nicht in gerader Linie, mit den auf den Lagern aufliegenden Theilen ist, so muss eine Bewegung erfolgen, wodnrch es nöthig wird, dnrch Veränderung der Versuche, diesen Fehler auszuschliessen oder zu verkleinern.

Zn diesen Versuchen über die Bewegnng der Schneiden während der Schwingungen des Pendels, wnrde wieder das im 26. Artikel beschriebene Pendel angewandt. Ich fand auf allen Unterlagen kleine Bewegungen, immer nach der Richtung der Bewegnng des Pendels: die Schneiden bewegen sich immer rechts, wenn das Pendel sich rechts bewegt nnd umgekehrt. Die Ausdehnung dieser Bewegung ist, den Versuchen zufolge, den Schwingungswinkeln proportional nnd für beide Schneiden gleich; sie schien für Agat-, Glas- und Stahlebenen und für Glascylinder genau gleich, und für jeden Grad des Schwingungs-

winkels $u' = 0{,}^{L}00004$ zu sein; für Messingebenen $= 0{,}^{L}00033$; für Messingcylinder von 1,63 Linie Durchmesser $= 0{,}^{L}00049$. Die sehr starke Vergrösserung nnter welcher diese Bewegnngen beobachtet wurden, zeigte, bei den beiden letzten Unterlagen deutlich, dass das Maximnm ihrer Schnelligkeit, mit dem Durchgange des Pendels durch die Lothlinie znsammenfällt. Die angegebenen Grössen aber sind weit weniger genau als man mit dem Apparate messen kann; denn es zeigten sich, vorzüglich bei den weicheren Unterlagen. Unterschiede, welche weit ansser den Grenzen der Messungsfehler lagen, so dass z. B. bei mehreren Wiederholungen des Versnchs auf den Messingcylindern, die Bewegnng für einen Grad des Schwingungswinkels $= 0{,}^{L}00034$ gefunden wurde; ich habe daher nur Mittel ans vielen Resultaten angeben können, deren jedes ohne Zweifel von der Härte und Beschaffenheit der Stelle der Unterlage abhängig war, wo die Schneide jedesmal lag.

Diese Versnche zeigen, dass die grossen, im vorigen Artikel angeführten Einwirknngen der Messingcylinder auf die Schwingungszeiten, nicht einer [91] Bewegnng der Schneiden zugeschrieben werden dürfen. Bezeichnet man die beobachteten Einwirknngen auf die Länge des gleichzeitig schwingenden einfachen Pendels, in beiden Lagen des Pendels, durch i und i', so entsprechen sie, nach den oben angeführten Entfernungen des Schwerpnnkts von den Schneiden, Aendernngen des Mittelpunkts der Bewegung von resp. $\frac{9}{5}i$ und $-\frac{4}{5}i'$; sollten diese wirklich stattfinden, so müsste der rnhende Pnnkt des Pendels nicht in der Schärfe der Schneide selbst liegen, sondern für die erste Schneide $\frac{9}{5}i$ unterhalb, für die andere $\frac{4}{5}i'$ oberhalb derselben, woraus also Bewegungen der Schneiden folgen würden, welche $\frac{18}{5}i \sin u'$ und $-\frac{8}{5}i' \sin u'$ betragen. Beide sind nngleich kleiner beobachtet worden, die erste sogar nach der entgegengesetzten Richtnng.

Auch können die beobachteten Bewegnngen nicht der Unznlänglichkeit der Reibnng znm Festhalten der Schneiden zngeschrieben werden. Da nämlich das Pendel ein fester Körper ist, welcher sich nicht um eine seiner freien Axen dreht, so ist eine Kraft erforderlich nm seine Drehungsaxe fest zu halten; diese Kraft ist die Reibung auf den Unterlagen, allein wenn sie nicht völlig ausreichte, und daher die Bewegung der Schneiden nicht ganz aufhöbe, sondern nnr auf eine kleine Quantität, im Verhältnisse $1 : \alpha$ reducirte, so würde diese übrig bleibende Bewegung immer der Schwingungsbewegung entgegengesetzt sein

und den Ansdruck $-2\alpha s u'$ haben, wo s die Entfernung des Schwerpnnkts von der Schneide bedeutet. Sie müsste also nicht nur in der Richtung verschieden, sondern anch für beide Schneiden von nngleicher Grösse sein; beides gegen die Erfahrung, welche also keinen Grund giebt, die Hinlänglichkeit der Reibung zum Festhalten der Axe zu bezweifeln.

Man sieht daher aus den Versuchen über die Schwingungszeiten nnd die Bewegung der Schneide, dass die Unterlagen der Bewegnng des Pendels eine Kraft entgegensetzen. Allein jede Kraft, welche nur auf die Schärfe der Schneide wirkt, kann keinen Einfluss anf die Schwingnngszeit haben: die Kraft muss also ans einem Eindrucke entstehen, welchen die Schneide in die Unterlage macht, so dass Punkte der ersteren, welche über der Schärfe liegen, mit der letzteren in Berührnng kommen; oder aus einer Veränderung der Figur der Schneide durch den Druck nnd die Bewegnng des Pendels; oder ans einer Znsammenwirkung beider Ursachen. Doch ist die zweite Ursache allein nicht hinreichend die Versnche zn erklären, indem [**92**] verschiedene Unterlagen dann gleiche Schwingungszeiten geben müssten. Die Versnche zeigen daher, dass die Schneide in die Unterlage einen Eindruck macht, woran aber anch aus anderen Gründen nicht gezweifelt werden kann.

Um die Art wie dieser Eindrnck anf die Schwingungsweiten wirkt, näher zn nntersnchen, habe ich, den in diesem Artikel angeführten Versuchen gemäss, angenommen, dass die Bewegung der Schneide den Schwingnngswinkeln proportional ist; hierans folgt, dass ein Punkt in der Axe des Pendels, über der Schneide, vorhanden ist, welcher auch bei der Bewegung, in derjenigen lothrechten Ebene bleibt, in welcher die Axe des Pendels und die Schneide, im Zustande der Ruhe sich befinden. Die Entfernnng dieses Pnnktes von der Schneide, welche ich durch h bezeichnen werde, wird dnrch die Ansdehnung der Bewegung der Schneide und den Schwingungswinkel bestimmt, und findet sich, ans den angeführten Angaben,

für die härteren Unterlagen $= 0{,}^{L}0012$
für Messingebenen 0, 0095
für Messingcylinder . . . . 0, 0140.

Nimmt man nnn an, dass der Schneide eine Kraft Q entgegenwirkt, welche von dem Orte der Schneide auf der Unterlage abhängig ist, oder

$$Q = a^{(0)} + a^{(1)} h \sin u + a^{(2)} h^2 \sin u^2 + \text{u. s. w.} \ldots$$

wo $h \sin u$ die Entfernung der Schneide von dem Orte welchen sie bei der Ruhe des Pendels einnimmt, ist, so erhält man, der X. Beilage zufolge, die Länge des gleichzeitig schwingenden einfachen Pendels, die dem ungestörten Pendel entsprechende $= l$ gesetzt:

$$l' = l + 2h - 2h\,\frac{l}{s}\left\{\frac{1}{2}\,a^{(1)}h + \frac{1.3}{2.4}\,a^{(3)}h^3 \sin u'^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,a^{(5)}h^5 \sin u'^4 + \text{u. s. w.}\right\}$$

die Abnahme des Schwingnngswinkels, während einer Schwingung

$$= \frac{2h}{s}\left\{a^{(0)} + \frac{1}{3}\,a^{(2)}h^2 \sin u'^2 + \frac{1}{5}\,a^{(4)}h^4 \sin u'^4 + \text{u. s. w.....}\right\}$$

Man sieht hieraus, dass die geraden Glieder im Ausdrucke der Kraft Q, vermöge welcher diese Kraft während der ganzen Schwingung der Bewegung entgegenwirkt, nur den Winkel ändern, auf die Zeit aber keinen Einfluss haben; dass dagegen die ungeraden Glieder, vermöge welcher die Kraft in [93] der ersten Hälfte der Schwingung die Bewegnng befördert, in der zweiten hindert, die Zeit, aber nicht den Winkel ändern. Die beobachtete Einwirknng der Messingebenen muss also von den ungeraden Gliedern herrühren, indem sie nnr die Zeit änderte; sie mnss ferner aus dem ersten dieser Glieder entstanden sein, indem nur dieses einen vom Schwingungswinkel unabhängigen Einfluss giebt, so wie die Versuche erfordern, welche für grössere und kleinere Winkel übereinstimmende Zeiten ergeben.

Die Reibung, so wie man sie anzunehmen pflegt, ist eine constante, stets entgegenwirkende Kraft und wird daher durch $a^{(0)}$ der Formel dargestellt. Diese Kraft ist aber nicht mit den Versuchen vereinbar, denn sie hat keinen merklichen Einfluss auf die Schwingungszeit, und einen viel zu grossen auf den Winkel. Setzt man nämlich $a^{(0)} = \frac{1}{5}$, welche Grösse man der Reibung gewöhnlich beilegt, und $h = 0{,}^L0095$ für die Messingebenen, so erhält man die Abnahme des Winkels, für beide Lagen des Pendels, $= 2{,}^s6$ und $5{,}^s9$, welche Zahlen so sehr viel grösser sind als die ganze beobachtete, durch den Widerstand der Luft erklärliche Abnahme, dass dieser Versuch der Annahme einer solchen Reibung bestimmt widerspricht.

Die Grösse des Coefficienten $a^{(1)}$ welche angenommen werden muss um den Versuch zu erklären, kann indessen nicht

absolut bestimmt werden, sondern nur abhängig von dem ähnlichen, zu den härteren Unterlagen gehörenden Coefficienten. Wenn sich nämlich l', h, $a^{(1)}$ auf die Messingebenen, $l_{,}'$, $h_{,}$, $a_{,}^{(1)}$ auf die härteren Unterlagen beziehen, so hat man

$$l' = l + 2h - \frac{l}{s} h^2 a^{(1)}$$

$$l_{,}' = l + 2h_{,} - \frac{l}{s} h_{,}^2 a_{,}^{(1)}$$

oder

$$l' - l_{,}' = 2h - 2h_{,} - \frac{l}{s} (h h a^{(1)} - h_{,} h_{,} a_{,}^{(1)})$$

Wenn man ferner das Maximum der Kraft Q, den am Anfange und am Ende der Schwingung wirkenden Werth derselben, für beide Arten der Unterlagen, durch Q' und $Q_{,}'$ bezeichnet, so hat man

$$Q' = a^{(1)} h \sin u'; \quad Q_{,}' = a_{,}^{(1)} h_{,} \sin u'$$

und wenn man $a^{(1)}$ und $a_{,}^{(1)}$ hierdurch eliminirt,

$$\frac{h}{h - h_{,}} Q' - \frac{h_{,}}{h - h_{,}} Q_{,}' = \frac{s}{l} \left\{ \frac{l_{,}' - l'}{h - h_{,}} + 2 \right\} \sin u'$$

[**94**] Giebt man den im December 1826 gemachten Versuchen auf Messingebenen, den Vorzug vor den späteren, indem jene die Störung der Schwingungszeit zeigten, ohne dass die Oberfläche der Ebenen einen bleibenden Eindruck erhielt, was bei den späteren nicht der Fall war, so hat man für beide Lagen des Pendels

$l_{,}' - l'$	+ 0,ˡ0280 ;	+ 0,ˡ0625
s	305,3 ;	135,7
h	0,0095 ;	0,0095
$h_{,}$	0,0012 ;	0,0012

woraus also

$$\frac{95}{83} Q' - \frac{12}{83} Q_{,}' = 3{,}7 \sin u' \text{ und } 3{,}0 \sin u'$$

hervorgeht; man sieht hieraus, dass die Kraft welche man annehmen muss um den Versuch zu erklären, selbst bei Schwingungswinkeln von $1\frac{1}{2}^0$, noch nicht den zehnten Theil der Schwere beträgt, also auch weit unter der Grösse bleibt, welche man der Reibung beizulegen pflegt. Ich bemerke übrigens, dass unter

Q die Summe aller, auf die Schneide reducirten Kräfte verstanden werden kann, und dass nicht gerade angenommen zu werden braucht, dass nur die Schärfe derselben einer Kraft ausgesetzt ist.

Durch diese Rechnung wollte ich zeigen, dass einerseits die gewöhnliche Reibung weder die Versuche erklärt, noch damit vereinbar ist, andererseits aber die Annahme einer sehr grossen Kraft, zu ihrer Erklärung nicht nöthig ist. Es scheint also, dass die Schneide, bei sehr kleinen Bewegungen, keine Reibung erfährt, sondern nur diejenige Kraft, welche aus der Verschiebung der Theile der Unterlage mit welchen sie, während ihrer sehr kleinen Bewegung, in Berührung bleibt, dadurch entsteht, dass die Elasticität der Unterlage die verschobenen Theile wieder auf ihren ursprünglichen Ort zurückzuführen strebt. Sobald aber die Bewegung so gross wird, dass $a^{(1)}h \sin u'$ grösser wird als $\frac{1}{8}$, so muss die gewöhnliche Reibung eintreten. Alle Erscheinungen welche die Reibung darbietet, scheinen mit der Annahme vereinbar zu sein, dass dieselbe aus den Eindrücken entsteht, welche die Oberflächen der sich reibenden Körper ineinander machen, und welche bei der Bewegung ihren Ort verändern; Rauhigkeit der Oberflächen vergrössert Ursache und Wirkung.

Die Erscheinungen, welche die Schwingungen auf Oberflächen darbieten, welche bleibende Eindrücke durch die Schneide erhalten, sind von den [95] hier untersuchten verschieden; auf Messingcylindern fand sich z. B. eine Aenderung der Schwingungswinkel, und eine Abhängigkeit der Schwingungszeit von diesen Winkeln. Es müssen also hier die höheren Glieder des Ausdrucks der Kraft merklich werden; allein die Erscheinung wird dadurch so zusammengesetzt, dass vermuthlich nichts allgemein anwendbares daraus gefolgert werden kann, und daher diese Versuche nur bemerkenswerth sind, weil sie eine stärker hervortretende Bestätigung davon geben, dass Einwirkungen, welche auf einen sehr kleinen Raum beschränkt sind, dennoch beträchtlichen Einfluss auf die Bewegung eines Pendels erlangen können.

Nimmt man das was ich über die Einwirkung der Unterlagen auf die Bewegung gesagt habe, zusammen, so scheint daraus hervorzugehen, dass die Schneide (indem sie sich in die Unterlage eindrückt, auch vielleicht Theile derselben über ihre ursprüngliche Oberfläche erhöhet, und dadurch, bei der Bewegung des Pendels, eine Bewegung der Materie der Unterlage erzeugt) sich nicht um ihre Schärfe, sondern um einen höheren oder

niedrigeren Punkt dreht, je nachdem niedrigere oder höhere Theile der Unterlage leichter ausweichen. Dass das erstere der Fall sei, deuten die Versuche an, indem man nicht wird annehmen können, dass die Schneide noch beträchtlich über das oben bestimmte h hinaus, mit der Unterlage in Berührung ist.

31.

Ich habe geglaubt, bei diesen Erscheinungen etwas länger verweilen zu dürfen, indem sich daraus die bemerkenswerthe Folgerung ergiebt, dass das Resultat eines Pendels mit reciproken Axen, von der Einwirkung der Unterlagen nur insofern abhängig ist, als sie den Punkt um welchen es sich drehet, etwas erhöht. Wie auch die in der Nähe des Drehungspunkts wirkenden Kräfte beschaffen sein mögen, so ist ihr Einfluss auf die entsprechende Pendellänge, stets der Entfernung des Schwerpunkts von der Schneide umgekehrt proportional; oder man hat, durch die Schwingung um die erste Schneide

$$l' = l + 2h - 2h\frac{l}{s} \cdot A$$

und um die zweite

$$l_,' = l_, + 2h_, - 2h_, \frac{l_,}{s_,} \cdot A.$$

[96] Wenn man aber die Schwingungszeiten um beide Schneiden gleich macht, und für l und $l_,$ ihre Ausdrücke:

$$l = \frac{\mu + ss}{s}, \quad l_, = \frac{\mu + s_, s_,}{s_,}$$

setzt, so folgt aus beiden Gleichungen

$$l' = s + s_, + h + h_, + \left(\frac{s + s_, - 2lA}{s - s_,}\right)(h - h_,).$$

Ich habe hier nicht angenommen, dass h und $h_,$ gleich seien; sind sie gleich, so verschwindet das letzte Glied unmittelbar, sind sie ungleich, so verschwindet es durch eine Wiederholung der Versuche mit verwechselten Schneiden. Indem man das Pendel so einrichtet, dass die Schneiden mit einander vertauscht werden können, erlangt man also, ausser dem im 25. Artikel erwähnten Vortheile, auch die möglichst vollständige Befreiung des Resultats von der Einwirkung der Unterlage.

Ich werde jetzt noch zeigen, wie das Pendel mit reciproken Axen, von welchem Herr *Bohnenberger* die Ehre der Erfindung, Herr *Kater* aber die Ehre der ausgezeichnetsten Anwendung besitzt, meiner Meinung nach eingerichtet werden muss, damit alle Schwierigkeiten so viel als möglich beseitigt werden. Es muss dasselbe, der äusseren Figur nach symmetrisch construirt werden, also, da es der Masse nach nicht symmetrisch sein darf, zwei gleich grosse und gegen die Schneiden gleich gestellte Linsen an einer Stange besitzen, deren eine mit Metall gefüllt, die andere hohl ist. Durch diese Einrichtung geht die Einwirkung der Luft aus der Rechnung, so dass der Stand der meteorologischen Instrumente nur in sofern in Betracht kömmt, als er sich zwischen zusammengehörigen Versuchen ändert. In der That ist, nach dem 13. Artikel, die entsprechende einfache Pendellänge für die Schwingung um die erste Schneide

$$l = \frac{\mu + \frac{m'}{m} K + ss}{s\left(1 - \frac{m'}{m} \cdot \frac{s'}{s}\right)},$$

für die andere, unter der Voraussetzung, dass beide Schwingungszeiten gleich gemacht worden sind, und dass die Dichtigkeit der Luft gleich geblieben ist,

$$l = \frac{\mu + \frac{m'}{m} K_{,} + s_{,} s_{,}}{s_{,}\left(1 - \frac{m'}{m} \cdot \frac{s_{,}'}{s_{,}}\right)}.$$

[97] Allein, wegen der Symmetrie der Construction ist $K_{,} = K$, $s_{,}' = s' = \frac{1}{2}(s + s_{,})$, also

$$ls - \frac{m'}{m} l \cdot \frac{s + s_{,}}{2} = \mu + \frac{m'}{m} K + ss$$

$$ls_{,} - \frac{m'}{m} l \cdot \frac{s + s_{,}}{2} = \mu + \frac{m'}{m} K + s_{,} s_{,}$$

woraus man

$$l = s + s_{,}$$

also unabhängig von der Einwirkung der Luft erhält.

Ferner müssen die Schneiden so eingerichtet werden, dass sie mit einander verwechselt werden können. Dadurch verschwindet der Einfluss der cylindrischen Figur derselben völlig,

so wie auch die Einwirkung der Unterlagen, selbst wenn sie für beide Schneiden verschieden ist, wie dieses, nach der Erfahrung des Herrn *Sabine*, für möglich gehalten werden muss. Das Mittel aus Versuchen vor und nach der Verwechselung der Schneiden, giebt die Länge des gleichzeitig schwingenden Pendels $= s + s, + h + h,$, wo h und $h,$, welche übrigens für harte Unterlagen sehr klein sind, durch die im vorigen Artikel beschriebene Einrichtung bestimmt werden können.

Endlich würde ich vorziehen, das bewegliche Gewicht wegzulassen, allein das Pendel so zu construiren, dass die Schwingungszeiten in der Luft, um beide Schneiden nahe gleich werden, welches dadurch geleistet werden kann, dass man die Stange, an welcher die Schneiden und die Linsen befindlich sind, anfänglich etwas zu lang lässt, und sie dann an beiden Enden symmetrisch, so lange abkürzt, bis die Gleichheit der Schwingungszeiten nahe stattfindet. Nennt man die beiden Schwingungszeiten, welche das Pendel in der Luft hat, auf eine gleiche Temperatur des Pendels und auf unendlich kleine Winkel reducirt, t und $t,$, so hat man im Mittel aus allen Versuchen, vor und nach der Verwechselung der Schneiden

$$\lambda t t = \frac{\mu + \frac{m'}{m} K\delta + ss}{s\left(1 - \frac{m'}{m} \cdot \frac{s + s,}{2s} \cdot \delta\right)}$$

$$\lambda t, t, = \frac{\mu + \frac{m'}{m} K\delta, + s,s,}{s,\left(1 - \frac{m'}{m} \cdot \frac{s + s,}{2s,} \cdot \delta,\right)}$$

[98] wo δ und $\delta,$ die Dichtigkeiten der Luft, die bei der Berechnung von m' zum Grunde gelegte zur Einheit angenommen, bezeichnen. Hieraus folgt

$$\lambda\left\{tt \,.\, s - tt \cdot \frac{m'}{m} \cdot \frac{s + s,}{2} \cdot \delta\right\} = \mu + \frac{m'}{m} K\delta + ss$$

$$\lambda\left\{t,t, .\, s, - t,t, \cdot \frac{m'}{m} \cdot \frac{s + s,}{2} \cdot \delta,\right\} = \mu + \frac{m'}{m} K\delta, + s,s,$$

und wenn man beide Gleichungen von einander abzieht und durch $s - s,$ dividirt

$$\lambda\left\{\frac{tt+t,t,}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{s+s,}{s-s,}\left(tt\left(1-\frac{m'}{m}\delta\right)-t,t,\left(1-\frac{m'}{m}\delta,\right)\right)\right\}$$
$$=s+s,+\frac{m'}{m}K\frac{(\delta-\delta,)}{s-s,};$$

das letzte Glied dieses Ausdrucks bleibt nnbekannt, allein wenn zwei zusammengehörige Versuche stets bald nach einander gemacht werden, so wird $\delta - \delta,$ sehr klein sein, in welchem Falle man dieses Glied vernachlässigen kann. Will man aber K selbst kennen lernen, so wird man es, aus den bei sehr verschiedenen Barometer- und Thermometerständen beobachteten Schwingnngszeiten um jede der Schneiden, mit der zur Berechnnng des letzten Gliedes hinreichenden Annäherung erhalten. Wenn man noch die ans h und $h,$ hervorgehende Verbessernng anbringt, so erhält man hieraus:

$$\lambda=\frac{s+s,+h+h,+\frac{m'}{m}K\cdot\frac{(\delta-\delta,)}{s-s,}}{\frac{tt+t,t,}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{s+s,}{s-s,}\left\{tt\left(1-\frac{m'}{m}\delta\right)-t,t,\left(1-\frac{m'}{m}\delta,\right)\right\}}$$

Durch die Weglassung des beweglichen Gewichts wird man genöthigt, die Entfernung des Schwerpunkts des Pendels von beiden Schneiden zu bestimmen; allein da man t und $t,$ willkürlich nahe gleich machen kann, so wäre hier eine rohe Annäherung hinreichend, obgleich es leicht ist, Mittel anzuwenden, wodurch man den Schwerpunkt sehr nahe richtig erhält. Der Vortheil den man dadurch erlangt, ist, dass alle Versuche mit demselben Pendel genau vergleichbar werden, und dass man die Schwierigkeit vermeidet, welche entsteht, wenn die anfängliche Berichtigung des beweglichen Gewichts, sich in der Folge der Versnche nicht vollständig bewährt. Ein solches Pendel, jedoch mit völlig befestigten Schneiden, möchte anch [**99**] vortheilhafter als die bisher üblichen sein, wenn es darauf ankömmt, die Schwere an verschiedenen Orten zn vergleichen.

Das so eingerichtete Pendel leistet dasselbe, was ich durch meinen Apparat, auf einem ganz verschiedenen Wege, erhalten habe, insofern nämlich dadurch die Unsicherheit über den Mittelpunkt der Bewegung, und die ans der Bewegung in der Luft entstehende Schwierigkeit, ans dem Resnltate geschafft werden. Allein ob man wagen darf, nach der Entdeckung des Herrn *Arago*, dass auch nicht eisenhaltige Substanzen magnetische

Wirkungen äussern, ein Pendel welches aus einer Stange construirt ist, anzuwenden, ist eine Frage, deren Beantwortung der Entdecker dieser merkwürdigen Eigenschaft vielleicht ertheilt: man könnte das Pendel mit der drehenden Scheibe von Messing in Herrn *Arago*'s Versuchen, und den Erdmagnetismus mit der Nadel vergleichen, welche durch die Drehung in Bewegung gesetzt wurde. Dass dieselbe Ursache auf ein Pendel, welches aus einer Kugel besteht, deren Durchmesser, vergleichungsweise mit der Länge des Fadens an welchem sie schwingt, sehr klein ist, einen merklichen Einfluss haben könnte, ist mir nicht denkbar. Die Versuche aus welchen *Newton* die Gleichheit der Schwere für alle irdischen Substanzen schloss, hoffe ich, mit dem Apparate auf welchen meine Bestimmung der Pendellänge beruht, sehr bald zu wiederholen, um dadurch das Stattfinden dieser wichtigen Eigenschaft strenger zu prüfen.

Beilage I.

Bewegung eines, sich von einem horizontalen Cylinder abwickelnden Pendels.

1.

Durch die Axe des Abwickelungscylinders lege man eine horizontale und eine verticale Ebene, und bezeichne die Entfernungen eines Punkts der durch die Abwickelung des Fadens entstehenden Curve, von der ersten Ebene durch x, von der andern durch y; ferner den Winkel des Fadens mit der zweiten Ebene, durch u; seine Länge, von dem Berührungspunkte mit dem Cylinder an gerechnet, durch r; den Werth von r für $u = 0$ durch ϱ; den Halbmesser des Cylinders durch a. Dann hat man, wenn man u nach der Richtung nach welcher der Faden sich abwickelt, positiv annimmt, $r = \varrho + a u$

$$x = (\varrho + a u) \cos u - a \sin u$$
$$y = (\varrho + a u) \sin u + a \cos u.$$

Wenn λ die Länge des einfachen Secundenpendels bedeutet und die Zeit t in mittleren Secunden ausgedrückt wird, so ist die Differentialgleichung der Bewegung eines Punktes auf einer vorgeschriebenen Curve bekanntlich

$$c = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} - 2\pi^2 \lambda . x$$

für unsern Fall also

$$c = (\varrho + a u)^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2\pi^2 \lambda . \{(\varrho + a u) \cos u - a \sin u\};$$

und wenn man den Winkel bei welchem die Schwingung anfängt, durch $-u'$ bezeichnet:

$$(\varrho + a u)^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 2\pi^2 \lambda \, \{(\varrho + a u) \cos u - a \sin u$$
$$- (\varrho + a u') \cos u' - a \sin u'\} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

2.

Die Untersuchungen über die Einwirkung störender Ursachen auf die Bewegung eines Pendels, erfordern meistentheils, dass man diese Bewegung aus einer Differentialgleichung von der Form:

[101] $$c = (1 + 2f'u)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2nn\,\{\cos u + fu\}$$

bestimme, in welcher $f'u, fu$ Functionen von u, von der Ordnung der störenden Ursache sind. Ich werde daher, bei dieser Gelegenheit, die Bewegung entwickeln, welche eine Folge dieser Gleichung ist, unter der Voraussetzung, dass man die Annäherung nicht über die erste Ordnung von fu und $f'u$ hinaustreibt.

Die Winkelgeschwindigkeit des Pendels verschwindet, wenn

$$0 = c + 2nn\,\{\cos u + fu\}$$

ist; am Anfange einer Schwingung ist dieses der Fall, und das u welches dem Ende derselben entspricht, ist eine zweite Wurzel dieser Gleichung. Nennt man die erstere $= -u'$, die andere $= u' - \delta u'$, so erhält man

$$\delta u' = \frac{f(-u') - fu'}{\sin u'}; \;\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

denselben Werth, mit entgegengesetzten Zeichen, erhält man für die entgegengesetzte Schwingung. Die Winkel bleiben also ungeändert; ihr Ausdruck durch den beobachteten Schwingungswinkel, d. i. durch die halbe Summe beider Entfernungen des Pendels von der Lothlinie $= u''$, ist

für die negative Grenze $= -u'' - \dfrac{f(-u') - fu'}{\sin u'}$

für die positive Grenze $= \quad u'' + \dfrac{f(-u') - fu'}{\sin u'}$.

Dieses setzt voraus, dass fu von der Richtung der Bewegung unabhängig ist; ist dieses nicht der Fall, sondern ist es eine zweiförmige Function, welche für beide Richtungen der Bewegung einen verschiedenen Ausdruck erhält, so findet die Unveränderlichkeit der Winkel nicht statt.

Um die Relation zwischen t und u zu erhalten, führe ich einen neuen Winkel φ ein, so dass $\cos u + fu$ dem Producte des Cosinus dieses Winkels in eine Constante gleich wird. Damit φ immer möglich bleibe und auch $= 0$ werden könne, ist es erforderlich, dass die Constante das Maximum von $\cos u + fu$, oder, in Grössen von der Ordnung von fu richtig, $= 1 + f0$ ist. Man hat also

$$(1 + f0)\cos\varphi = \cos u + fu,$$

woraus

[102]
$$u = \varphi + \frac{f\varphi - f0.\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

folgt. Setzt man dieses in die Differentialgleichung, so verwandelt sie sich in

$$(1 + 2f'\varphi)\left\{\frac{d\varphi + d\,\dfrac{f\varphi - f0.\cos\varphi}{\sin\varphi}}{dt}\right\}^2$$
$$= 2nn(1 + f0)\{\cos\varphi - \cos\varphi'\}.$$

Nimmt man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die Quadratwurzel, so erhält man

$$dt = \pm\frac{d\varphi}{n\sqrt{(2\cos\varphi - 2\cos\varphi')}}$$
$$\pm\frac{(f'\varphi - \frac{1}{2}f0)\,d\varphi + d\,\dfrac{f\varphi - f0.\cos\varphi}{\sin\varphi}}{n\sqrt{(2\cos\varphi - 2\cos\varphi')}}$$

wo das obere Zeichen für Schwingungen in positiver Richtung gilt, das untere für entgegengesetzte.

Das Integral dieses Differentials, von $\mp\varphi'$ bis $\pm\varphi'$ genommen, ist die Dauer einer ganzen Schwingung; will man sie von dem beobachteten Schwingungswinkel u'' abhängig machen, so hat man, nach vollendeter Integration, φ' durch u'' anszudrücken, wodurch man erhält

$$-\varphi' = -u' + \frac{f(-u') - f0.\cos u'}{\sin u'}$$
$$= -u'' - \frac{2f0.\cos u' - fu' - f(-u')}{2\sin u'}$$

$$\varphi' = u' - \frac{fu' - f0 . \cos u'}{\sin u'}$$
$$= u'' + \frac{2f0 . \cos u' - fu' - f(-u')}{2 \sin u'}.$$

Das erste Glied des Integrals ist bekanntlich

$$= \frac{\pi}{n} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin \frac{1}{2} \varphi'^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin \frac{1}{2} \varphi'^4 + \dots \right\}$$
$$= \frac{\pi}{n} F\varphi';$$

also, durch u'' ausgedrückt

$$= \frac{\pi}{n} \left\{ Fu'' + \frac{dFu''}{du''} . \frac{2f0 \cos u' - fu' - f(-u')}{2 \sin u'} \right\};$$

in dem zweiten, welches von der Ordnung der störenden Ursache ist, kann u für φ geschrieben werden. Man erhält dadurch den Ausdruck der, für entgegengesetzte Richtungen der Bewegung gleichen Schwingungszeit:

$$= \frac{\pi}{n} \left\{ Fu'' + \frac{dFu''}{du} . \frac{2f0 . \cos u' - fu' - f(-u')}{2 \sin u'} \right\}$$
$$+ \frac{1}{n} \int \frac{(f'u - \frac{1}{2} f0) du + d \frac{fu - f0 . \cos u}{\sin u}}{\sqrt{(2 \cos u - 2 \cos u')}} \dots (3)$$

wo das Integral von $-u'$ bis $+u'$ genommen wird.

[103] 3.

Wenn die Schwingungen sehr klein sind, wie es bei den Beobachtungen der Pendel der Fall ist, so wird man die Producte der Störungen in die höheren Potenzen von u' meistentheils vernachlässigen dürfen; wenn man für fu und $f'u$ die Formen

$$fu = \alpha + \alpha' \sin \tfrac{1}{2} u + \alpha'' \sin \tfrac{1}{2} u^2 + \text{u. s. w.}$$
$$f'u = \beta + \beta' \sin \tfrac{1}{2} u + \beta'' \sin \tfrac{1}{2} u^2 + \text{u. s. w.}$$

annimmt, und die Producte der Coefficienten dieser Reihen in die über das Quadrat hinausgehenden Potenzen von u' vernachlässigt, so findet man:

$$\frac{2f0.\cos u' - fu' - f(-u')}{2} = -(2\alpha + \alpha'')\sin\tfrac{1}{2}u'^2$$

$$f'u - \tfrac{1}{2}f.0 + \frac{d\left(\frac{fu - f0.\cos u}{\sin u}\right)}{du}$$

$$= \beta + \frac{\alpha''}{4} + \left(\beta' + \frac{\alpha'}{4} + \frac{\alpha'''}{2}\right)\sin\tfrac{1}{2}u$$

$$+ \left(\beta'' + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha''}{4} + \frac{3\alpha''''}{4}\right)\sin\tfrac{1}{2}u^2$$

und hieraus den, bis zu der angegebenen Grenze vollständigen Ausdruck der Schwingungszeit:

$$= \frac{\pi}{n}\left\{Fu''\left(1 + \beta + \frac{\alpha''}{4}\right) + \sin\tfrac{1}{2}u'^2\left(\frac{\beta''}{2} + \frac{3\alpha''''}{8}\right)\right\}.$$

Nennt man die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem hier betrachteten gleichzeitig, von $-u''$ bis $+u''$ schwingt, $= l$, so ist

$$\frac{l}{\lambda}\cdot(Fu'')^2 = \frac{\pi\pi}{nn}\left\{Fu''\left(1 + \beta + \frac{\alpha''}{4}\right)\right.$$

$$\left. + \sin\tfrac{1}{2}u'^2\left(\frac{\beta''}{2} + \frac{3\alpha''''}{8}\right)\right\}^2$$

woraus

$$l = \frac{\pi^2.\lambda}{nn}\left\{1 + 2\beta + \frac{\alpha''}{2} + \sin\tfrac{1}{2}u'^2\left(\beta'' + \frac{3\alpha''''}{4}\right)\right\} \ldots\ldots (4)$$

folgt.

4.

Für das Pendel, dessen Bewegung hier betrachtet werden sollte, ist (1)

$$f'u = \frac{\alpha}{\varrho}\{2\sin\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{3}\sin\tfrac{1}{2}u^3 + \ldots\}$$

$$fu = \frac{\alpha}{\varrho}\{\tfrac{1}{3}\sin\tfrac{1}{2}u^3 + \ldots\}$$

$$nn = \frac{\pi^2\lambda}{\varrho}$$

[104] also $\beta = \beta'' = \alpha'' = \alpha'''' = 0$, und daher

$$l = \varrho$$

oder es vollendet eine ganze Schwingung in derselben Zeit, in welcher ein vom Mittelpunkte des Abwickelungscylinders eben so tief herabhängendes einfaches Pendel sie vollenden würde.

Beilage II.

Einfluss der Federkraft des Fadens auf seine Figur und die Schwingungszeit des Pendels.

1.

Ich werde zuerst die Figur bestimmen, welche ein nicht völlig biegsamer Faden von gegebener Länge ($= S$) annimmt, wenn er am oberen Ende befestigt ist, dann über einen horizontalen, festen Cylinder (dessen Halbmesser $= a$) geht, und am unteren Ende durch eine Kraft ($= T''$) gezogen wird, welche mit der Lothlinie einen Winkel ω'' macht.

Den Mittelpunkt des Cylinders nehme ich zum Anfangspunkte der Coordinaten x und y, und zwar bezeichnet die erste die Entfernung eines Punkts von der durch den Mittelpunkt des Cylinders gelegten horizontalen Linie, die andere die Entfernung von der Lothlinie durch denselben Mittelpunkt; die erstere ist unterwärts positiv, die andere auf der Seite auf welcher der Faden den Cylinder berührt. Für den festen Anfangspunkt sind die Coordinaten x' und y', für den Endpunkt x'' und y''. Der Winkel des Fadens mit der Lothlinie wird allgemein durch φ, also für den Anfang und das Ende derselben durch φ' und φ'' bezeichnet.

Nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten ist die charakteristische Eigenschaft der Figur, welche der Faden im Gleichgewicht annimmt, dass, wenn diese Figur unendlich wenig variirt (so dass die Variation mit den Bedingungen verträglich bleibt, welchen die Figur entsprechen soll) und nun die auf jeden Punkt wirkende Kraft, in die auf ihre Richtung bezogene Variation des Punkts multiplicirt, die Summe aller dieser Producte verschwindet. Die hierauf gegründete Methode, welche *Lagrange* in der unsterblichen *Mécanique analytique* gegeben hat, werde ich hier anwenden.

[105] 2.

Die Federkraft des Fadens kann als eine Kraft angesehen werden, welche verschwindet wenn der Faden gerade ist, und welche die Krümmung zu vermindern sucht wenn er krumm ist. Nach den im 1. Artikel eingeführten Bezeichnungen, sucht also diese Kraft ($= E$) die Veränderung des Winkels φ, an jedem Punkte des Fadens, zu vermindern. Wenn man daher diesen Winkel in der variirten Curve durch $\varphi + \delta\varphi$ bezeichnet, also seine Veränderungen in der Curve des Gleichgewichts und in der variirten durch $d\varphi$ und $d\varphi + d\delta\varphi$, so ist das Product der Kraft in die auf ihre Richtung bezogene Variation $= E d\delta\varphi$, und daher die Summe aller dieser Producte

$$= \int E d\delta\varphi.$$

Ich werde auch den Anfangspunkt des Fadens als frei, und der Einwirkung einer Kraft ausgesetzt annehmen, welche der Kraft womit der Faden den Befestigungspunkt zieht, gleich, aber in entgegengesetzter Richtung angebracht ist. Diese unbekannte Kraft bezeichne ich durch T' und den gleichfalls unbekannten Winkel den sie mit der Lothlinie macht durch $180^0 + \omega'$. Aus dieser Kraft und der am Ende des Fadens, im Winkel ω'' wirkenden Kraft T'', erhält man die Kräfte nach der Richtung

$$\text{der } x \ldots. - T' \cos\omega' \text{ und } T'' \cos\omega''$$
$$\text{der } y \ldots. - T' \sin\omega' \text{ und } T'' \sin\omega''$$

und diese, in die Variationen der Coordinaten multiplicirt, ergeben Producte welche der oben schon gefundenen Summe hinzugefügt, die vollständige Bedingungsgleichung des Gleichgewichts geben. Man hat diese daher:

$$0 = - T' \cos\omega' . \delta x' - T' \sin\omega' . \delta y' + T'' \cos\omega'' . \delta x'' + T'' \sin\omega'' . \delta y'' + \int E d\delta\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

In dieser Gleichung müssen die Variationen so genommen werden, dass sie den Bedingungen nicht zuwider sind, welchen die Figur des Fadens entsprechen muss. Die erste dieser Bedingungen ist, dass die Coordinaten x und y in der Curve des Gleichgewichts, und die Coordinaten $x + \delta x$ und $y + \delta y$ in der variirten, einem und demselben Punkte des Fadens entsprechen, oder dass die Länge des Fadens, vom Anfange desselben bis zu diesem Punkte, in beiden Curven gleich ist; diese Bedingung giebt daher:

[106] $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \int\sqrt{\{(dx+d\delta x)^2+(dy+d\delta y)^2\}}$,

oder, wenn ds das Differential der Länge bezeichnet,

$$0 = \int\left\{\frac{dx}{ds}\,d\delta x + \frac{dy}{ds}\,d\delta y\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Die andere Bedingung erfordert, dass beide Curven die Oberfläche des Cylinders berühren, oder dass für die den Curven und der Oberfläche des Cylinders gemeinschaftlichen Punkte

$$aa = xx + yy = (x+\delta x)^2 + (y+\delta y)^2$$

sei, woraus für diese Punkte die Bedingungsgleichung

$$0 = x\delta x + y\delta y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

folgt.

3.

Da der Gleichung (2) in der ganzen Ausdehnung des Fadens Genüge geleistet werden muss, so kann man sie mit der Gleichung (1) vereinigen, indem man sie, unter dem Integralzeichen, mit einem unbestimmten Factor λ multiplicirt, und das Product der Gleichung (1) hinzufügt; man erhält dadurch:

$$\begin{aligned} 0 = &- T'\cos\omega'\delta x' - T'\sin\omega'\delta y' \\ &+ T''\cos\omega''\delta x'' + T''\sin\omega''\delta y'' \\ &+ \int\left\{E d\delta\varphi + \lambda\frac{dx}{ds}\,d\delta x + \lambda\frac{dy}{ds}\,d\delta y\right\} \ldots (4)\end{aligned}$$

Um nun $d\delta\varphi$ durch die Coordinaten x und y auszudrücken, hat man

$$\cos\varphi = \frac{dx}{ds};\quad \cos(\varphi+\delta\varphi) = \frac{dx+d\delta x}{ds}$$

$$\sin\varphi = \frac{dy}{ds};\quad \sin(\varphi+\delta\varphi) = \frac{dy+d\delta y}{ds}$$

woraus

$$\delta\varphi = \frac{dx.d\delta y - dy.d\delta x}{ds^2}$$

folgt. Hierdurch verwandelt sich die Gleichung (4) in

$$
\begin{aligned}
0 = & - T' \cos\omega' \delta x' - T' \sin\omega' \delta y' \\
& + T'' \cos\omega'' \delta x'' + T'' \sin\omega'' \delta y'' \\
& + \int \left\{ E d \cdot \frac{dx . d\delta y}{ds^2} - E d \cdot \frac{dy . d\delta x}{ds^2} \right. \\
& \left. + \lambda \frac{dx}{ds} d\delta x + \lambda \frac{dy}{ds} d\delta y \right\}
\end{aligned}
$$

[107] und ergiebt, nach gehöriger Integration,

$$
\begin{aligned}
0 = & - T' \cos\omega' \delta x' - T' \sin\omega' \delta y' \\
& + T'' \cos\omega'' \delta x'' + T'' \sin\omega'' \delta y'' \\
+ E & \left\{ \frac{dx . d\delta y - dy . d\delta x}{ds^2} \right\} + \delta x \left\{ \frac{dy . dE}{ds^2} + \lambda \frac{dx}{ds} \right\} \\
& - \delta y . \left\{ \frac{dx . dE}{ds^2} - \lambda \frac{dy}{ds} \right\} \\
& - \int \delta x \left\{ d \cdot \frac{dy . dE}{ds^2} + d . \lambda \frac{dx}{ds} \right\} \\
& + \int \delta y \left\{ d \cdot \frac{dx . dE}{ds^2} - d . \lambda \frac{dy}{ds} \right\} \dots\dots\dots\dots (5)
\end{aligned}
$$

wo die ausser dem Integralzeichen stehenden Glieder für beide Endpunkte des Fadens genommen werden müssen.

4.

Die beiden Glieder unter dem Integralzeichen müssen, für Theile des Fadens, welche nicht mit dem Cylinder in Berührung sind, abgesondert verschwinden, indem sowohl δx als δy willkürlich bleiben müssen. Man hat daher für die freien Theile des Fadens:

$$
0 = d \cdot \frac{dy . dE}{ds^2} + d . \lambda \frac{dx}{ds}
$$

$$
0 = d \cdot \frac{dx . dE}{ds^2} - d . \lambda \frac{dy}{ds}
$$

und durch Integration dieser Gleichungen,

$$
c = \frac{dy . dE}{ds^2} + \lambda \frac{dx}{ds}
$$

$$
c' = \frac{dx . dE}{ds^2} - \lambda \frac{dy}{ds}
$$

woraus unmittelbar folgt:

$$\lambda = c\frac{dx}{ds} - c'\frac{dy}{ds} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{dE}{ds} = c\frac{dy}{ds} + c'\frac{dx}{ds} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (7)$$

und wenn man die letzte Gleichung integrirt,

$$E = cy + c'x + c'' \dots\dots\dots\dots\dots (8)$$

Für die Theile des Fadens, welche den Cylinder berühren, fallen die Bedingungen des freien Gleichgewichts weg; und da die Berührung mit dem Cylinder auch die Variation von φ verhindert, so bleibt von der Gleichung (5), in Beziehung auf diese Theile, nur

[108]

$$0 = \delta x\left\{d\cdot\frac{dy.dE}{ds^2} + d.\lambda\frac{dx}{ds}\right\}$$
$$-\delta y\left\{d.\frac{dx.dE}{ds^2} - d.\lambda\frac{dy}{ds}\right\}$$

übrig. Allein die Bedingungsgleichung (3) giebt die Relation von δx und δy für diese Theile, und mit ihrer Anwendung verwandelt sich die eben gegebene Gleichung in

$$0 = yd\cdot\frac{dy.dE}{ds^2} + xd\cdot\frac{dx.dE}{ds^2}$$
$$+ y.d.\lambda\frac{dx}{ds} - x.d.\lambda\frac{dy}{ds}.$$

Führt man die hier angedeuteten Differentiationen aus, und setzt man dabei, der Oberfläche des Cylinders gemäss:

$$0 = xdx + ydy;\quad 0 = dx^2 + dy^2 + xd^2x + yd^2y$$

so erhält man aus dieser Gleichung, also gültig für die Theile des Fadens, welche den Cylinder berühren

$$0 = dE - ad\lambda,$$

oder wenn d eine willkürliche Constante ist,

$$d = E - a\lambda \dots\dots\dots\dots\dots (9)$$

5.

Die Glieder in der Gleichung (5), welche sich auf den Anfangspunkt und den Endpunkt des Fadens beziehen, ergeben die beiden Gleichungen:

$$0 = E' \left\{ \frac{dx'.d\delta y' - dy'.d\delta x'}{ds^2} \right\}$$
$$+ \delta x' \left\{ - T' \cos\omega' + \frac{dy'.dE'}{ds^2} + \lambda' \frac{dx'}{ds} \right\}$$
$$+ \delta y' \left\{ - T' \sin\omega' - \frac{dx'.dE'}{ds^2} + \lambda' \frac{dy'}{ds} \right\}$$
$$0 = E'' \left\{ \frac{dx''.d\delta y'' - dy''.d\delta x''}{ds^2} \right\}$$
$$+ \delta x'' \left\{ T'' \cos\omega'' + \frac{dy''.dE''}{ds^2} + \lambda'' \frac{dx''}{ds} \right\}$$
$$+ \delta y'' \left\{ T'' \sin\omega'' - \frac{dx''.dE''}{ds^2} + \lambda'' \frac{dy''}{ds} \right\}$$

Da beide Endpunkte als frei angenommen sind, so bleiben die Variationen der Coordinaten, so wie auch ihre Differentialquotienten, willkürlich; man hat daher

[109]

$$\left.\begin{aligned}
0 &= E' \\
0 &= - T' \cos\omega' + \frac{dy'.dE'}{ds^2} + \lambda' . \frac{dx'}{ds} \\
0 &= - T' \sin\omega' + \frac{dx'.dE'}{ds^2} + \lambda' . \frac{dy'}{ds} \\
0 &= E'' \\
0 &= T'' \cos\omega'' + \frac{dy''.dE''}{ds^2} + \lambda'' . \frac{dx''}{ds} \\
0 &= T'' \sin\omega'' - \frac{dx''.dE''}{ds^2} + \lambda'' . \frac{dy''}{ds}
\end{aligned}\right\} \ldots (10)$$

Indem die Integrale in der Gleichung (5) nicht ohne Unterbrechung vom Anfange des Fadens bis zum Ende genommen werden, sondern für die freien und für die den Cylinder berührenden Theile eine verschiedene Bedeutung haben, so gelten die daraus abgeleiteten Gleichungen (6), (7), (8) zwar für alle freien Theile des Fadens, aber die Constanten c, c', c'' sind für die beiden, durch

den Cylinder getrennten Theile nicht nothwendig dieselben. Ich werde für den oberen Theil die Bezeichnung c, c', c'' beibehalten, für den unteren aber $c_,$, $c_,'$, $c_,''$ schreiben. Hiernach verwandeln sich die Gleichungen (10), mittelst (6), (7), (8) in

$$\left.\begin{aligned} 0 &= cy' + c'x' + c'' \\ 0 &= - T' \cos\omega' + c \\ 0 &= - T' \sin\omega' - c' \\ 0 &= c_,y'' + c_,'x'' + c_,'' \\ 0 &= T'' \cos\omega'' + c_, \\ 0 &= T'' \sin\omega'' - c_,' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

6.

Um die Figur des Fadens zu bestimmen, muss E durch die Federkraft desselben ausgedrückt werden. Ich werde dabei den Faden als gleichförmig annehmen, und übrigens dieselbe Hypothese anwenden, welche man den Untersuchungen der elastischen Linie immer zum Grunde gelegt hat: man denkt sich nämlich einen unendlich kleinen Theil des Fadens, an beiden Enden, durch unbiegsame gerade Linien fortgesetzt, die eine dieser Linien als fest, die andere, in der Entfernung e von dem unendlich kleinen Theil [**110**] des Fadens, der senkrechten Einwirkung einer Kraft k ausgesetzt, welche Kraft daher den Faden krümmt, so dass er einen Krümmungshalbmesser erhält, welchen ich durch h bezeichne; setzt man für e, k, h andere Werthe, e', k', h', so ist die erwähnte Hypothese, dass die Krümmungshalbmesser sich umgekehrt verhalten wie die Drehungsmomente der Kräfte, oder

$$h : h' = e'k' : ek$$

woraus

$$e'k' = \frac{ekh}{h'}$$

folgt. Dieses $e'k'$ ist die durch E bezeichnete (in der Entfernung 1 angenommene) Kraft; h' ist der Krümmungshalbmesser der Curve, und ehk, welches ich in der Folge durch μ bezeichnen werde, ist das Maass der Federkraft des Fadens. Da die Curve der Axe ihre hohle Seite zukehrt, so ist also

$$E = - \frac{\mu\, dx . d^2y}{\sqrt{\{dx^2 + dy^2\}^3}}\,.$$

7.

Wenn man für E den Ausdruck (8) setzt, so erhält man die Differentialgleichung der Curve

$$\frac{-\mu\, dx.d^2y}{\sqrt{\{dx^2+dy^2\}^3}} = cy + c'x + c'' \ldots\ldots.(12)$$

und wenn man dieselben mit $cdy + c'dx$ multiplicirt, integrirt und durch e eine willkürliche Constante bezeichnet

$$\mu\left\{\frac{cdx - c'dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}\right\} = e + \frac{1}{2}\{cy + c'x + c''\}^2 \ldots(13)$$

woraus das vollständige Differential

$$c'dy - cdx$$
$$= \frac{\pm (cdy + c'dx)\{e + \frac{1}{2}(cy + c'x + c'')^2\}}{\sqrt{\{\mu\mu(cc+c'c') - (e + \frac{1}{2}(cy + c'x + c'')^2)^2\}}} \quad (14)$$

folgt, dessen Integral die endliche Gleichung der Curve ist.

Nimmt man das Integral (13) vom Anfange des Fadens, bis zu dem Punkte, wo derselbe anfängt, den Cylinder zu berühren, und bezeichnet man durch ψ' den Winkel der Tangente an diesem Punkte mit der Lothlinie, so erhält man eine Gleichung zwischen φ' und ψ'; nimmt man dann das [111] Integral von (14) zwischen denselben Grenzen, so ergiebt es, da die Coordinaten des Berührungspunkts von ψ' abhängen, nämlich

$$x_{,} = -a \sin\psi'; \quad y_{,} = a \cos\psi',$$

eine zweite Gleichung zwischen denselben Winkeln, so dass beide durch x', y', T', ω' gegeben sind. Auf dieselbe Art hat man zwei Gleichungen für die ähnlichen Winkel φ'' und ψ'', welche zu dem Theile des Fadens zwischen dem Cylinder und dem Ende gehören, wodurch auch diese durch x'', y'', T'', ω'' gegeben werden.

Wenn der Faden zwischen den Punkten ψ' und ψ'' ganz auf der Cylinderfläche aufliegt, so zeigt die Gleichung (9), dass λ an diesen Punkten gleich ist; denn E hängt von dem Krümmungshalbmesser des Fadens ab, und dieser ist für die Cylinderfläche unveränderlich; man hat also, aus (6)

$$c \cos\psi' - c' \sin\psi' = c_{,} \cos\psi'' - c_{,}' \sin\psi''$$

und wenn man für die Constanten ihre Ausdrücke (11) schreibt,

$$-T' \cos(\omega' - \psi') = T'' \cos(\psi'' - \omega'') \ldots\ldots(15)$$

Ferner ergiebt (8)

$$E_{,} = c y_{,} + c' x_{,} + c''; \quad E_{,,} = c_{,} y_{,,} + c_{,}' x_{,,} + c_{,}''$$

oder, da beide $= \frac{\mu}{a}$ sind, nach (11)

$$\frac{\mu}{a} = a\, T' \cos(\omega' - \psi') + c'' = -\, a\, T'' \cos(\psi'' - \omega'') + c_{,}''$$

woraus, in Verbindung mit (15)

$$c'' = c_{,}'' = \frac{\mu}{a} - a\, T' \cos(\omega' - \psi') \;\ldots\;\;\ldots (16)$$

folgt. Diese drei Gleichungen (15) und (16) und eine vierte, welche man durch den Ausdruck der ganzen Länge des Fadens erhält, bestimmen die in den Ausdrücken von φ', ψ', φ'', ψ'' noch unbekannt gebliebenen T', ω', x'', y''.

Wenn dagegen der Faden den Cylinder nur in einem Punkte berührt, so hat man $\psi' = \psi''$, und die Gleichungen (6) und (8) ergeben

$$- T' \cos(\omega' - \psi') = T'' \cos(\psi'' - \omega'')$$
$$c'' = c_{,}''$$

wodurch, wiederum mit dem Ausdrucke der ganzen Länge des Fadens verbunden, alle unbekannten Grössen bestimmt werden.

[**112**] 8.

Die Durchführung der hier angedeuteten Auflösung der Aufgabe, hat aber die Schwierigkeit, dass die Integration des Differentials (14) von einer transcendenten Function abhängt, welche die Elimination der verschiedenen unbekannten Grössen nicht erlaubt. Diese Schwierigkeit wird vermieden, wenn der Faden, auf beiden Seiten des Cylinders unendlich lang angenommen wird, wodurch er, an seinen beiden Endpunkten dieselben Richtungen erhält, in welchen die Kräfte T' und T'' ihn ziehen; es ist überdies klar, dass dann beide Kräfte gleich und beide Schenkel der Curve symmetrisch werden. Ich werde die Aufgabe »die Figur eines unendlich langen Fadens zu bestimmen, welcher in gegebenen Richtungen $180^0 + \omega'$ und ω'', von gleichen Kräften T'' gezogen wird, aber einen Cylinder berührt« ganz entwickeln, weil diese nicht merklich von der verschieden

ist, welche der Pendelapparat darbietet. Denn hier ist μ, vergleichungsweise mit T'', eine sehr kleine Grösse, und daher die Krümmung des Fadens, in einigermaassen erheblicher Entfernung vom Cylinder, unmerklich, so dass es gleichgültig ist, ob man seine Länge als endlich, oder als unendlich ansieht.

Um der Gleichung (14) eine einfachere Gestalt zu geben, werde ich neue rechtwinklichte Coordinaten ξ und η einführen, so dass die ersteren auf den Asymptoten an die Schenkel der Curve gezählt werden, und zwar an dem Punkte anfangen, wo diese Schenkel aufhören mit dem Cylinder in Berührung zu sein; den Werth von η für $\xi = 0$, bezeichne ich durch b. Man erhält dadurch für den oberen Schenkel,

$$\left.\begin{aligned} x &= -\xi\cos\omega' - (b-\eta)\sin\omega' - a\sin\psi' \\ y &= -\xi\sin\omega' + (b-\eta)\cos\omega' + a\cos\psi' \end{aligned}\right\}\ldots(17)$$

und für den unteren

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi\cos\omega'' - (b-\eta)\sin\omega'' - a\sin\psi'' \\ y &= \xi\sin\omega'' + (b-\eta)\cos\omega'' + a\cos\psi'' \end{aligned}\right\}\ldots(18)$$

Durch diese neuen Coordinaten wird $cy + c'x + c''$, oder $c(y-y') + c'(x-x')$ (11), wenn man unter x', y' die Coordinaten eines unendlich entfernten Punkts versteht,

$$= T''.\eta;$$

ferner ergiebt (13) für einen unendlich entfernten Punkt des Fadens

$$e = -T''.\mu,$$

[113] und dann für $\xi = 0$, wo $\frac{dx}{ds} = \cos\psi'$, $\frac{dy}{ds} = \sin\psi'$ ist,

$$-T''\mu\cos(\omega'-\psi') = -T''\mu + \frac{1}{2}T''T''.bb$$

oder

$$bb = \frac{2\mu}{T''}\{1-\cos(\omega'-\psi')\}$$

$$b = 2\sqrt{\frac{\mu}{T''}}\cdot\sin z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

wenn man $2z$ für $\omega'-\psi' = \psi''-\omega''$ schreibt.

Die Entscheidung über die Frage, welcher von beiden vorausgesetzten Fällen stattfindet, ob ψ' und ψ'' ungleich sind und der Faden dazwischen ganz auf dem Cylinder aufliegt, oder ob

beide zusammenfallen und der Faden den Cylinder nur in einem Punkte berührt, wird durch die Gleichung

$$cy_{,} + c'x_{,} + c'' = E_{,}$$

gegeben; man hat nämlich die Grösse links vom Gleichheitszeichen $= T''b$, und $E_{,} = \frac{\mu}{h}$, wo h den Krümmungshalbmesser bezeichnet, woraus sich, wenn man für b seinen Ausdruck (19) setzt,

$$\sin z = \frac{1}{2h}\sqrt{\frac{\mu}{T''}}$$

ergiebt. In dem ersten Falle ist h gleich dem Halbmesser des Cylinders, und $2z$ kleiner als $\frac{1}{2}(\omega' - \omega'')$, also

$$\sin z = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\mu}{T''}} \text{ und } \sin\frac{1}{4}(\omega' - \omega'') > \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\mu}{T''}};$$

in dem zweiten Falle ist h nicht kleiner als der Halbmesser des Cylinders, aber $2z = \frac{1}{2}(\omega' - \omega'')$, also

$$\sin z = \sin\frac{1}{4}(\omega' - \omega'') \text{ und } \sin\frac{1}{4}(\omega' - \omega'') \overline{\overline{<}} \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\mu}{T''}}$$

wodurch also beide Fälle unterschieden werden.

Das Differential (14) verwandelt sich, durch Einführung der neuen Coordinaten, in

$$d\xi = \pm\sqrt{\frac{\mu}{T''}} \cdot \frac{\left(1 - \frac{T''}{2\mu}\eta\eta\right)d\eta}{\sqrt{\left(1 - \frac{T''}{4\mu}\eta\eta\right)}}$$

[114] und es gilt das untere Zeichen indem η abnimmt wenn ξ wächst. Das Integral hiervon, von $\xi = 0$ an gerechnet, ist

$$\xi = \sqrt{\frac{\mu}{T''}}\left[\log\left\{\frac{b}{\eta} \cdot \frac{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{T''}{4\mu}\eta\eta\right)}}{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{T''}{4\mu}bb\right)}}\right\} + 2\sqrt{\left(1 - \frac{T''}{4\mu}bb\right)} - 2\sqrt{\left(1 - \frac{T''}{4\mu}\eta\eta\right)}\right] \ldots (20)$$

Endlich hat man den Bogen der Curve, von $\xi = 0$ an gerechnet,

$$s = \int \sqrt{\{d\xi^2 + d\eta^2\}} = \sqrt{\frac{\mu}{T''}} \log \left\{ \frac{b}{\eta} \cdot \frac{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{T''}{4\mu}\eta\eta\right)}}{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{T''}{4\mu}bb\right)}} \right\}$$

$$= \xi + 2\sqrt{\frac{\mu}{T''}} \left\{ \sqrt{\left(1 - \frac{T''}{4\mu}\eta\eta\right)} - \sqrt{\left(1 - \frac{T''}{4\mu}bb\right)} \right\} \quad (21)$$

9.

Um den Punkt zu bestimmen, in welchem das untere Ende des Fadens sich befindet, wenn das obere fest ist, muss man die ganze Länge desselben $= S$, durch auf die Curve sich beziehende Grössen ausdrücken. Man hat (21), wenn man η' und $\eta'' = 0$ und für b seinen Ausdruck (19) setzt,

$$s' = \xi' + 2\sqrt{\frac{\mu}{T''}}(1 - \cos z)$$

$$s'' = \xi'' + 2\sqrt{\frac{\mu}{T''}}(1 - \cos z)$$

also im ersten Falle

$$S = s' + s'' + a(\psi' - \psi'')$$

$$= \xi' + \xi'' + 4\sqrt{\frac{\mu}{T''}}(1 - \cos z) + a(\omega' - \omega'') - 4az$$

und im zweiten Falle dieselbe Formel, indem alsdann $\omega' - \omega'' = 4z$ ist, also die beiden letzten Glieder verschwinden.

Bestimmt man nun den Ort der beiden Endpunkte des Fadens durch Perpendikel von dem Mittelpunkte des Cylinders auf die Axen der ξ' und ξ'' gefällt, und durch die Entfernungen der Endpunkte von diesen Perpendikeln, und bezeichnet man die ersteren (welche für beide Schenkel gleich sind) durch p, die letzteren durch ϱ' und ϱ'', so hat man

$$p = b + a\cos 2z \ldots\ldots \quad (22)$$
$$\varrho' = \xi' - a\sin 2z$$
$$\varrho'' = \xi'' - a\sin 2z$$

[115] und hiermit

$$S = \varrho' + \varrho'' - 2a(2z - \sin 2z)$$
$$+ 4\sqrt{\frac{\mu}{T''}}(1 - \cos z) + a(\omega' - \omega'').$$

Versetzt man das Pendel in den Zustand der Ruhe und des freien Gleichgewichts, und bezeichnet man seine Tiefe unter dem Mittelpunkte des Cylinders, oder den Werth von ϱ'' für $\omega'' = 0$ und $T'' = 1$, durch ϱ, den diesem Zustande zugehörigen Werth von z durch z', so hat man, indem ϱ' durch eine Aenderung von ω'' und T'' nicht geändert wird,

$$S = \varrho' + \varrho - 2a(2z' - \sin 2z') + 4\sqrt{\mu}\,.(1 - \cos z') + a\omega'$$

und wenn man aus beiden Ausdrücken S eliminirt:

$$\varrho'' = \varrho + a\omega'' + 2a(2z - \sin 2z - 2z' + \sin 2z')$$
$$- 4\sqrt{\frac{\mu}{T''}}(1 - \cos z) + 4\sqrt{\mu}(1 - \cos z') \ldots (23)$$

wodurch also, da die Ausdrücke von z und b oben schon gegeben sind, die Aufgabe vollständig aufgelöst ist.

10.

Nachdem, durch das Vorhergehende, die Figur des Fadens und der Ort seines Endpunkts bestimmt worden sind, werde ich den Einfluss der Federkraft auf die Schwingungszeit des Pendels untersuchen; ich werde dabei die Masse des Pendels als im Endpunkte des Fadens vereinigt annehmen.

Man kann die Bewegung dieses Punkts als frei betrachten, oder seine Verbindung mit dem Faden ganz ausser Acht lassen, wenn man ihn als der Wirkung zweier Kräfte ausgesetzt ansieht, nämlich der Schwere und der die Figur des Fadens bestimmenden Kraft T'', diese in entgegengesetzter Richtung, oder im Winkel $180^\circ + \omega''$ gegen die Lothlinie angenommen. Man hat dann die nach der Richtung der Coordinaten x'' und y'' wirkenden Kräfte

$$1 - T''\cos\omega'' \quad \text{und} \quad - T''\sin\omega''$$

und also, da der Punkt als frei angenommen wird, die beiden Gleichungen

$$0 = \frac{d^2x''}{dt^2} + \pi^2\lambda(T''\cos\omega'' - 1)$$

$$0 = \frac{d^2 y''}{dt^2} + \pi^2 \lambda . T'' \sin \omega''$$

[116] wo λ die Länge des einfachen Secundenpendels, π die halbe Kreisperipherie und t die in mittleren Secunden ausgedrückte Zeit bedeuten. Setzt man für die rechtwinklichten Coordinaten ihre Ausdrücke durch ϱ'', p, ω'', nämlich:

$$x'' = \varrho'' \cos \omega'' - p \sin \omega''$$
$$y'' = \varrho'' \sin \omega'' + p \cos \omega''$$

und multiplicirt man die Gleichungen mit $\cos \omega''$ und $\sin \omega''$, ferner mit $-\sin \omega''$ und $\cos \omega''$, so sind die Summen ihrer Producte

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 \varrho''}{dt^2} - \varrho'' \left(\frac{d\omega''}{dt}\right)^2 - 2\,\frac{dp}{dt}\cdot\frac{d\omega''}{dt} - p\,\frac{d^2\omega''}{dt^2} \\ &\quad + \pi^2 \lambda\,(T''' - \cos \omega'') \\ 0 &= \frac{d^2 p}{dt^2} - p\left(\frac{d\omega''}{dt}\right)^2 + 2\,\frac{d\varrho''}{dt}\cdot\frac{d\omega''}{dt} + \varrho''\cdot\frac{d^2\omega''}{dt^2} \\ &\quad + \pi^2 \lambda . \sin \omega'' \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Man erhält ein erstes Integral dieser Gleichungen durch Integration der Summe der Producte der ersten in $2\,(d\varrho'' - p\,d\omega'')$, der zweiten in $2\,(\varrho'' d\omega'' + dp)$, nämlich:

$$c = \left(\varrho''\,\frac{d\omega''}{dt} + \frac{dp}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho''}{dt} - p\,\frac{d\omega''}{dt}\right)^2$$
$$- 2\pi^2\lambda \{\varrho'' \cos \omega'' - p \sin \omega'' - \int T''' (d\varrho'' - p\,d\omega'')\} \ldots (25)$$

Das hier noch unter dem Integralzeichen stehende Glied ist, in beiden abgesonderten Fällen, ein vollständiges Differential. Man hat nämlich aus (22) und (23)

$$p = b + a \cos 2z = 2\sqrt{\frac{\mu}{T'''}} \sin z + a \cos 2z$$
$$\varrho'' = \varrho + a\,\omega'' + 2a\,(2z - \sin 2z - 2z' + \sin 2z')$$
$$- 4\sqrt{\frac{\mu}{T'''}}(1 - \cos z) + 4\sqrt{\mu}\,(1 - \cos z')$$

woraus

$$T''' (d\varrho'' - p\,d\omega'') = a\,T''' (1 - \cos 2z)\,(d\omega'' + 4\,dz)$$
$$- 2\sqrt{\mu\,T'''} . \sin z\,(d\omega'' + 2\,dz) + 2\sqrt{\frac{\mu}{T'''}}\,(1 - \cos z)\,d\,T'''$$

folgt. Im ersten Falle ist aber

$$\sin z = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\mu}{T''}}$$

und wenn man hierdurch T'' eliminirt, das Differential

$$= -\frac{\mu}{2a}\, d\omega'' - \frac{2\mu}{a} \cdot \frac{\cos z \,.\, dz}{1 + \cos z}$$

$$= -d\left\{\frac{\mu}{2a}\,\omega'' + \frac{2\mu}{a}\left(z - \operatorname{tgt}\frac{1}{2}\,z\right)\right\}.$$

[117] Im anderen Falle ist

$$z = \frac{1}{4}(\omega' - \omega''), \quad dz = -\frac{1}{4}\, d\omega''$$

also das Differential

$$= 4\sqrt{\mu T''} \,.\, \sin z\, dz + 2\sqrt{\frac{\mu}{T''}}\,(1 - \cos z)\, dT''$$

$$= 4\, d\left\{\sqrt{\mu T''} \,.\, (1 - \cos z)\right\}.$$

Hierdurch verwandelt sich die Gleichung (25) im ersten Falle in

$$c = \left(\varrho''\frac{d\omega''}{dt} + \frac{dp}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho''}{dt} - p\,\frac{d\omega''}{dt}\right)^2$$
$$- 2\pi^2\lambda\left\{\varrho''\cos\omega'' - p\sin\omega'' + \frac{\mu}{2a}\,\omega''\right.$$
$$\left. + \frac{2\mu}{a}\left(z - \operatorname{tgt}\frac{1}{2}\,z\right)\right\} \qquad\qquad 26)$$

und im zweiten in

$$c = \left(\varrho''\frac{d\omega''}{dt} + \frac{dp}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho''}{dt} - p\,\frac{d\omega''}{dt}\right)^2$$
$$- 2\pi^2\lambda\left\{\varrho''\cos\omega'' - p\sin\omega'' - 4\sqrt{\mu T''}\,(1 - \cos z)\right\}. \qquad (27)$$

11.

Die weitere Integration werde ich unter der Bedingung ausführen, dass das Pendel, vor dem Anfange der Bewegung, auf einer Ebene ruht, welche der Axe des Cylinders parallel, in dem Winkel $\omega'' = u'$ gegen die Lothlinie geneigt ist, und dass die

Bewegung durch das Wegnehmen dieser Ebene entsteht. Dieser Bedingung zufolge haben, am Anfange der Bewegung, oder für $t = 0$, ϱ'' und p die Werthe (23) und (22), und man hat ferner für dieselbe Zeit $\frac{d\omega''}{dt} = 0$, $\frac{d\varrho''}{dt} = 0$, $\frac{dp}{dt} = 0$.

Die Annäherung werde ich nicht über Grössen von der Ordnung von $\sqrt{\mu}$ und a hinausführen, und beide als von der ersten Ordnung betrachten. Um diese Annäherung zu erhalten, ist es nothwendig, dass man die Kraft T''' exclusive der Glieder der ersten Ordnung kenne, denn sie kömmt in den Ausdrücken von ϱ'' und p und in den Gleichungen (26) und (27) nur in Grössen von der ersten Ordnung multiplicirt vor. Man kann daher in der ersten der Gleichungen (24) die Grössen der ersten Ordnung vernachlässigen, wodurch sie sich in

$$0 = (T''' - \cos\omega'')\pi^2\lambda - \varrho\left(\frac{d\omega''}{dt}\right)^2$$

verwandelt; man hat ferner aus (25), exclusive dieser Grössen,

[118]
$$c = \varrho^2\left(\frac{d\omega''}{dt}\right)^2 - 2\pi^2\lambda\varrho\cos\omega'',$$

und für den Anfang der Bewegung

$$c = -2\pi^2\lambda\varrho\cos u'$$

wodurch man c und $\frac{d\omega''}{dt}$ eliminiren kann, und dann den von allen für die fernere Rechnung überflüssigen Gliedern befreiten Ausdruck

$$T''' = 3\cos\omega'' - 2\cos u' \dots\dots\dots\dots (28)$$

erhält.

12.

In beiden abgesonderten Fällen ist das zweite Glied der Gleichungen (26) und (27) wegzulassen, indem es von der zweiten Ordnung ist. Man hat also für den ersten Fall

$$\left(\varrho''\frac{d\omega''}{dt} + \frac{dp}{dt}\right)^2 = 2\pi^2\lambda\left\{\varrho''\cos\omega'' - p\sin\omega'' + \frac{\mu}{2a}\omega'' + \frac{2\mu}{a}\left(z - \operatorname{tgt}\frac{1}{2}z\right) - C\right\}$$

wofür ich, immer unter Vernachlässigung der Grössen von der zweiten Ordnung,

$$\left(\frac{d\omega''}{dt}\right)^2\left\{1+2\cdot\frac{\varrho''-\varrho}{\varrho}+2\frac{dp}{d\omega''}\right\}=\frac{2\pi^2\lambda}{\varrho}\left\{\cos\omega''\right.$$

$$\left.+\frac{\varrho''-\varrho}{\varrho}\cos\omega''-\frac{p}{\varrho}\sin\omega''+\frac{\mu\omega''}{2a\varrho}+\frac{2\mu}{a\varrho}\left(z-\operatorname{tgt}\frac{1}{2}z\right)-C\right\}$$

schreiben werde.

Dieses Differential ist unter der Form begriffen, für welche ich, in der I. Beilage, das Integral entwickelt habe. Es ist also nur nöthig, dass man

$$f\omega''=\frac{\varrho''-\varrho}{\varrho}\cos\omega''+\frac{p}{\varrho}\sin\omega''+\frac{\mu\omega''}{2a\varrho}+\frac{2\mu}{a\varrho}\left(z-\operatorname{tgt}\frac{1}{2}z\right)$$

$$f'\omega''=\frac{\varrho''-\varrho}{\varrho}+\frac{dp}{d\omega''}$$

nach den Potenzen von $\sin\frac{1}{2}\omega''$ entwickele, und die Coefficienten der geraden Potenzen in die 4. Formel (Beilage I.) setze. Um dieses möglichst leicht auszuführen werde ich diejenigen Glieder beider Ausdrücke, welche allein in der Rechnung bleibende, gerade Potenzen von $\sin\frac{1}{2}\omega''$ enthalten, zuerst von z allein abhängig machen. Man hat nämlich, da

$$\sin z=\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\mu}{T''}},\quad \sin z'=\frac{1}{2a}\sqrt{\mu}$$

[119] ist, aus (23), wenn man die ungeraden Glieder weglässt:

$$\varrho''-\varrho$$
$$=2a\{2z-4\sin z+\sin 2z-2z'+4\sin z'-\sin 2z'\}$$

und für das letzte Glied des Ausdrucks von $f\omega''$

$$\frac{2\mu}{a}\left\{z-\operatorname{tgt}\frac{1}{2}z\right\}=8a\sin z'^2\left\{z-\operatorname{tgt}\frac{1}{2}z\right\};$$

die übrigen Glieder von $f\omega''$ und $f'\omega''$ fallen weg, da sie nur ungerade Potenzen von $\sin\frac{1}{2}\omega''$ enthalten. Da aber

$$\frac{\sin z'^2}{\sin z^2}=T''=1-6\sin\frac{1}{2}\omega''^2+4\sin\frac{1}{2}u'^2$$

so darf man nur die beiden durch z ausgedrückten Grössen als Functionen von $\frac{1}{\sin z^2}$ betrachten, und ihre Entwickelung mit

den ähnlichen Functionen von z' anfangen, während man sie nach den Potenzen von

$$\frac{1}{\sin z^2} - \frac{1}{\sin z'^2} = \frac{-6 \sin \frac{1}{2} \omega''^2 + 4 \sin \frac{1}{2} u'^2}{\sin z'^2}$$

fortgehen lässt. Auf diese Art findet man die in der I. Beilage durch α'', α'''', β, β'' bezeichneten Coefficienten

$$\alpha'' = \frac{a}{\varrho} \sin z' (1 - \cos z') \, 64 \sin \frac{1}{2} u'^2$$

$$\alpha'''' = -\frac{a}{\varrho} \sin z' (1 - \cos z') . 24 \; .$$

$$\beta = \frac{a}{\varrho} \sin z' (1 - \cos z') . 16 \sin \frac{1}{2} u'^2$$

$$\beta'' = -\frac{a}{\varrho} \sin z' (1 - \cos z') . 24 \; .$$

Ferner ist

$$nn = \frac{\pi^2 \lambda}{\varrho}$$

also die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem hier betrachteten gleichzeitig schwingt

$$= \varrho + a \sin z' (1 - \cos z') . 22 \sin \frac{1}{2} u'^2$$

oder, wenn man z' durch μ und a ausdrückt:

$$= \varrho + 11 \sqrt{\mu} \left\{ 1 - \sqrt{\left(1 - \frac{\mu}{4aa}\right)} \right\} \sin \frac{1}{2} u'^2 \ldots (29)$$

[**120**] Im zweiten Falle hat man, durch (27), die Gleichung:

$$\left(\frac{d\omega''}{dt}\right)^2 \left\{ 1 + 2 \frac{\varrho'' - \varrho}{\varrho} + \frac{2\, dp}{\varrho\, d\omega''} \right\}$$
$$= \frac{2\pi^2\lambda}{\varrho} \left\{ \cos \omega'' + \frac{\varrho'' - \varrho}{\varrho} \cos \omega'' - \frac{p}{\varrho} \sin \omega'' - \frac{4\sqrt{\mu T'''}}{\varrho} \left(1 - \cos \frac{\omega' - \omega''}{4}\right) - C \right\}$$

oder

$$f\omega'' = \frac{\varrho'' - \varrho}{\varrho} \cos\omega'' - \frac{p}{\varrho} \sin\omega'' - \frac{4\sqrt{\mu T'''}}{\varrho}\left(1 - \cos\frac{\omega' - \omega''}{4}\right)$$

$$f'\omega'' = \frac{\varrho'' - \varrho}{\varrho} + \frac{dp}{\varrho\, d\omega''}.$$

Allein in diesem Falle ist:

$$\varrho'' - \varrho = 2a\left\{\sin\frac{1}{2}\omega' - \sin\frac{\omega' - \omega''}{2}\right\} - 4\sqrt{\frac{\mu}{T''}}\left(1 - \cos\frac{\omega' - \omega''}{4}\right) + 4\sqrt{\mu}\left(1 - \cos\frac{\omega'}{4}\right)$$

$$p = a\cos\frac{\omega' - \omega''}{2} + 2\sqrt{\frac{\mu}{T''}}\sin\frac{\omega' - \omega''}{4}$$

$$T'' = 3\cos\omega'' = 2\cos u'$$

Setzt man dieses in die Ausdrücke von $f\omega''$ und $f'\omega''$, und entwickelt man dieselben nach den Potenzen von $\sin\frac{1}{2}\omega''$, so erhält man

$$\alpha'' = -\frac{a}{\varrho}\sin\frac{\omega'}{2} + \frac{\sqrt{\mu}}{\varrho}\left\{\cos\frac{\omega'}{4} + \left(32 - 36\cos\frac{\omega'}{4}\right)\sin\frac{1}{2}u'^2\right\}$$

$$\alpha''' = -\frac{3}{4}\cdot\frac{a}{\varrho}\sin\frac{\omega'}{2} + \frac{\sqrt{\mu}}{\varrho}\left\{-12 + \frac{287}{16}\cos\frac{\omega'}{4}\right\}$$

$$\beta = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\varrho}\sin\frac{\omega'}{2} + \frac{\sqrt{\mu}}{\varrho}\left\{-\frac{1}{2}\cos\frac{\omega'}{4} + \left(8 - 7\cos\frac{\omega'}{4}\right)\sin\frac{1}{2}u'^2\right\}$$

$$\beta'' = \frac{3}{4}\cdot\frac{a}{\varrho}\sin\frac{\omega'}{2} + \frac{\sqrt{\mu}}{\varrho}\left\{-12 + \frac{113}{16}\cos\frac{'\omega}{4}\right\}$$

Hieraus folgt, nach der Formel 4, Beilage I, die Länge des gleichzeitig schwingenden einfachen Pendels:

$$= \varrho + \frac{1}{2}a\sin\frac{\omega'}{2} - \sqrt{\mu}\,.\cos\frac{\omega'}{4} + \left\{\frac{3}{16}a\sin\frac{\omega'}{2} + \sqrt{\mu}\left(11 - \frac{735}{64}\cos\frac{\omega'}{4}\right)\right\}\sin\frac{1}{2}u'^2 \,..(30)$$

[121] 13.

Die Annahme am Anfange des 11. Artikels, dass nämlich das Pendel aus dem Zustande des Gleichgewichts in die Bewegung übergeht, hat die Rechnung bedeutend abgekürzt, indem dadurch zwei willkürliche Constanten welche in dem vollständigen Integrale der Gleichungen enthalten sind, verschwinden. Dadurch gehen alle Glieder deren Periode von der durch die Ausdrücke (29), (30) bestimmten verschieden ist, aus der Rechnung, so wie etwas ähnliches immer stattfindet wenn ein System von materiellen Punkten, in Beziehung auf alle möglichen Bewegungen, exclusive einer einzigen, vor dem Anfange der Bewegung, ins Gleichgewicht gebracht ist. Diese hier verschwundenen Glieder haben Perioden, deren Dauern von den störenden Kräften abhängen und daher weit kürzer sind als die Hauptperiode des Pendels, welche ich allein bestimmt habe; sie bringen eine scheinbar zitternde Bewegung des Pendels hervor, welche jedesmal vorhanden sein muss wenn der Anfang der Bewegung der gemachten Voraussetzung nicht wirklich entspricht. Man wird aber schwer zu der Ueberzeugung gelangen können, dass der Anfang der Bewegung, bei einer Reihe von Schwingungen des Pendels, diese Bedingung erfüllt; allein noch schwerer würde die Bestimmung der ursprünglichen Werthe von $\frac{d\varrho''}{dt}$ und $\frac{dp}{dt}$ sein, indem diese allein aus Zufälligkeiten entstehen, vorausgesetzt dass man beabsichtigt die über den Anfang der Bewegung gemachte Bedingung zu erfüllen. Es geht hieraus hervor, dass die Bewegung des Pendels gewissermassen unbestimmt bleibt. Allein diese Unbestimmtheit hat auf die Versuche keinen Einfluss, indem theils die Kürze der Perioden der erwähnten Glieder verursacht, dass die aus einem Intervalle von vielen Schwingungen abgeleitete Schwingungszeit, nicht merklich geändert werden kann, theils aber auch diese Glieder durch den Widerstand der Luft sehr bald vernichtet werden, so dass, bald nach dem Anfange einer Beobachtungsreihe, die Bewegung des Pendels, wirklich in den Zustand kömmt, welcher der Rechnung zum Grunde gelegt wurde. Die letzte Bemerkung findet bei allen Gliedern von kurzer Periode ihre Anwendung; also auch bei denen, welche aus der Ausdehnbarkeit des Fadens und aus den Drehungen der einzelnen Theile des Pendels um ihre eigenen Hauptaxen entstehen.

[122] Beilage III.

Tafel für den Werth eines Pendelschlages der Uhr P, in mittlerer Zeit.

k	a	Diff.	b
45^m	$0^s9976390.63$	80.37	$0^s0000115.47$
46	6310.26	76.93	115.47
47	6233.33	73.73	115.47
48	6159.60	70.72	115.47
49	6088.88	67.87	115.47
50	6021.01	65.22	115.47
51	5955.79	62.72	115.47
52	5893.07	60.35	115.47
53	5832.72	58.11	115.47
54	5774.61	56.00	115.47
55	5718.61	53.99	115.46
56	5664.62	52.10	115.46
57	5612.52	50.31	115.46
58	5562.21	48.60	115.46
59	5513.61	46.98	115.46
60	5466.63	45.43	115.46
61	5421.20	43.98	115.46
62	5377.22	42.57	115.46
63	5334.65	41.25	115.46
64	5293.40	39.97	115.46
65	5253.43		115.46

Wenn die Zeit k der Uhr R, der Zeit $k - 1^s$ der Uhr P gleich, und die tägliche Verspätung der ersteren gegen Sternenzeit $= s$, so ist ein Pendelschlag der letzteren, in mittlerer Zeit ausgedrückt,

$$= a + b.s.$$

[123] Beilage IV.

Einwirkung der Temperatur auf den Pendelapparat.

Tafel für die wahren Temperaturen, welche den Angaben der drei Thermometer e', e'', e''' entsprechen.

Angabe der Therm.	Wahre Temperatur. e'	e''	e'''
0°	— 0°,23	— 0°,39	— 0°,44
1	+ 0,74	+ 0,59	+ 0,52
2	1,70	1,58	1,48
3	2,67	2,56	2,44
4	3,63	3,54	3,40
5	4,59	4,53	4,37
6	5,54	5,52	5,35
7	6,50	6,51	6,33
8	7,46	7,50	7,31
9	8,45	8,48	8,30
10	9,44	9,46	9,30
11	10,42	10,44	10,29
12	11,41	11,41	11,28
13	12,36	12,37	12,24
14	13,31	13,34	13,20
15	14,25	14,30	14,16
16	15,20	15,27	15,13
17	16,16	16,24	16,11
18	17,13	17,21	17,10
19	18,10	18,18	18,09
20	19,07	19,16	19,08
21	20,05	20,14	20,07
22	21,03	21,13	21,06
23	22,01	22,11	22,05
24	22,99	23,09	23,04
25	23,97	24,06	24,03
26	24,95	25,02	25,01
27	25,93	25,98	25,99
28	26,91	26,95	26,98
29	27,90	27,93	27,97
30	28,90	28,92	28,96

Der Einfluss der Temperatur auf die Messungen des kurzen Pendels ist folgendermassen berechnet worden. Der feste Ansatz, auf welchem der Cylinder von Stahl (i) ruht, ist 521 Linien über dem Boden des Gehäuses; der Cylinder (i) ist 46 Linien lang; die auf seiner oberen Ebene ruhende Kugel des Abwickelungscylinders hat 3 Linien Halbmesser und ihr Mittelpunkt ist 570 Linien hoch. Der Punkt der eisernen Stange wo die Hülse von Glockenmetall befestigt ist, welche die Mikrometerschraube und den Cylinder mit dem Fühlhebel enthält, ist 430,5 Linien unter dem festen Ansatze, also 90,5 Linien hoch; diese Hülse ist 51,5 Linien lang, ihr unteres Ende also 39 Linien hoch. Die Ausdehnungen dieser Theile, nämlich des Stahlcylinders (i) und der darauf liegenden Kugel, des Eisens der Stange zwischen dem festen Ansatze und dem Befestigungspunkte der Hülse, endlich der Hülse, vergrössern die Entfernung des Fühlhebels von dem Aufhängepunkte; die folgenden wirken vom unteren Ende der Hülse an, also in entgegengesetzter Richtung: [**124**] die Mikrometerschraube von Stahl, 12,5 Linien lang; die Mutter derselben von Messing, 6 Linien lang; der Stahlcylinder welcher den Fühlhebel trägt, 48 Linien lang; endlich der Halbmesser der Pendelkugel von 12,1 Linien, welcher in die Rechnung kömmt, indem die thermometrischen Ausdehnungen bis zum Schwingungspunkte genommen werden müssen.

Bezeichnet man die Ausdehnungen des Stahls, Eisens, Glockenmetalls und Messings durch S, E, G, M, so hat man für die verschiedenen angeführten Theile:

	Höhe der Mitte $= h$	Ausdehnung für 1° C.
Kugel am Abwickelungscylinder . . .	568,5	$+ \ 3{,}0 . S$
Cylinder i, worauf derselbe ruht . . .	544, 0	$+ \ 46{,}0 . S$
Eiserne Stange	305, 75	$+ \ 430{,}5 . E$
Hülse der Mikrometervorrichtung . .	64, 75	$+ \ 51{,}5 . G$
Mikrometerschraube	45, 25	$- \ 12{,}5 . S$
Schraubenmutter derselben	53, 75	$- \ 6{,}0 . M$
Stahlcylinder unter dem Fühlhebel .	81, 5	$- \ 48{,}0 . S$
Halbmesser der Pendelkugel	111, 5	$- \ 12{,}1 . M$

Nimmt man die Temperaturen dieser Theile, nach dem 7. Artikel

$$= \frac{584 - h}{388} e' + \frac{h - 196}{388} e''$$

und setzt man die Ausdehnungen der Metalle

$S = 0{,}000011898$. *Troughton*
$E = 0{,}000011400$. *Borda*
$G = 0{,}000019080$. *Berthoud*
$M = 0{,}000018783$. *Lavoisier* und *Laplace*

so erhält man die Aenderung der Entfernung des Aufhängepunkts vom Fühlhebel, weniger dem Halbmesser der Kugel

$$= 0^L{,}0035153 . e' + 0^L{,}0018979\, e''$$
$$= 0^L{,}0054132\ \{0{,}6494 . e'' + 0{,}3506 . e''\}.$$

Wenn dagegen die Toise auf dem Cylinder (*i*) steht, und der Abwickelungscylinder auf ihrem oberen Ende ruht, so hat man für die

Kugel am Abwickelungscylinder...	1432,5	+ 3,0 S
Toise........................	999,0	+ 864,0 E

[**125**] und ferner die für das kurze Pendel berechneten Wirkungen der Temperatur, mit Ausnahme der ersteren. Nimmt man für die hinzugekommenen beiden Theile, die Temperatur

$$= \frac{1292 - h}{708}\, e'' + \frac{h - 584}{708}\, e'''$$

so erhält man die Veränderung für jeden Grad des Thermometers:

$$- 0^L{,}0000014 . e' + 0^L{,}0040339 . e'' + 0^L{,}0058162 . e''',$$

oder, wenn man e'' für e' setzt, was wegen der Kleinheit des in e' multiplicirten Gliedes erlaubt ist,

$$+ 0^L{,}0040325 . e'' + 0^L{,}0058162 . e''$$
$$= 0^L{,}0098487\ \{0{,}4095 . e'' + 0{,}5905 . e'''\}.$$

Dass der Coefficient mit dem im 7. Artikel angegebenen richtigeren, nicht vollkommen übereinstimmt, rührt daher, dass hier die Toise $0^L{,}16$ (um welche Quantität sie beim Eispunkte kürzer ist als 864 Linien) zu lang angenommen worden ist.

Ich füge noch eine Tafel für die Länge der Toise und die Veränderung von F hinzu:

Temperatur.	Toise	F
0°	863,ˡ83917	0,ˡ00000
1	84902	+ 0, 00541
2	85887	0, 01083
3	86872	0, 01624
4	87857	0, 02165
5	88841	0, 02707
6	89826	0, 03248
7	90811	0, 03789
8	91796	0, 04331
9	92780	0, 04872
10	93765	0, 05413
11	94750	0, 05955
12	95735	0, 06496
13	96720	0, 07037
14	97704	0, 07578
15	98689	0, 08120
16	99674	0, 08661
17	864, 00659	0, 09202
18	01643	0, 09744
19	02628	0, 10285
20	03613	0, 10826
21	04598	0, 11368
22	05582	0, 11909
23	06567	0, 12450
24	07552	0, 12992
25	08537	0, 13533
26	09522	0, 14074
27	10506	0, 14616
28	11491	0, 15157
29	12476	0, 15698
30	13461	0, 16240

[126] Beilage V.

Certificat über die Vergleichung der Toise.

Le 31me août 1823, nous avons comparé, Mr. Zahrtmann et moi, la toise en fer que Mr. Fortin a construite pour Mr. Bessel de Königsberg, à l'étalon en fer de l'observatoire connu sous le nom de Toise du Pérou. Il nous a semblé que la Règle de Mr. Bessel et plus courte que l'étalon de l'observatoire de $\frac{1}{1278^{me}}$ de ligne (de un douze cent soixante dix-huitième de ligne).

(*signé*) *F. Arago. Zahrtmann.*

Beilage VI.

Bewegung eines Pendels in einer Flüssigkeit.

Wenn man, dem 13. Artikel zufolge, für die Summe der bewegten Theilchen der Flüssigkeit, jedes in das Quadrat seiner Geschwindigkeit multiplicirt, den Ausdruck

$$m'u'u'nn\{b^{(0)}+b^{(2)}\cos(2nt+B^{(2)})+b^{(4)}\cos(4nt+B^{(4)}) + \text{u. s. w.}\}$$

annimmt, und den durch den Anstoss des Pendels an immer andere Theile der Flüssigkeit verursachten Verlust an lebendiger Kraft nicht berücksichtigt, indem er auf die Zeit einer ganzen Schwingung keinen Einfluss hat, so hat man die Gleichung der Bewegung:

$$c = m\{\mu+ss\}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2\pi^2\lambda\{ms-m's'\}\cos u + m'u'u'nn\{b^{(0)}+b^{(2)}\cos(2nt+B^{(2)})+\text{u. s. w.}\}$$

oder

$$e = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2n'n'\{\cos u - u'u'\zeta(b^{(0)}+b^{(2)}\cos(2nt+B^{(2)}) + \text{u. s. w.})\}$$

wo

$$n'n' \text{ für } \frac{\pi^2 \lambda (ms - m's')}{m(\mu + ss)}$$

$$\zeta \text{ für } \frac{m'nn}{2\pi^2 \lambda (ms - m's')}$$

[127] geschrieben ist. Wenn man diese Gleichung mit der in der I. Beilage untersuchten vergleicht, so hat man

$$fu = -u'u'\zeta (b^{(0)} + b^{(2)} \cos (2nt + B^{(2)}) + \text{u. s. w.} \ldots)$$
$$f'u = 0$$

und für das dortige n, hier n'. Man kann daher die Zeit einer ganzen Schwingung des Pendels, durch die dritte Formel jener Beilage erhalten. Allein da es noch unentschieden ist, ob $b^{(0)}$, $b^{(2)}, \ldots B^{(2)}, \ldots$ beständig, oder von der Ausdehnung der Schwingungen abhängig sind, so kann der von dem Quadrate und den höheren Potenzen des Schwingungswinkels abhängige Theil der Zeit, nicht vollständig gefunden werden, weshalb ich von der erwähnten Formel alles weglassen werde, was nur auf diesen Theil Einfluss erhält. Dadurch verwandelt diese Formel sich in

$$\frac{\pi}{n'} + \frac{1}{n'} \int \frac{d \cdot \frac{fu - f0}{u}}{\sqrt{(u'u' - uu)}},$$

und da hier nur die Einwirkung, welche von der Ordnung der störenden Ursache selbst ist, bestimmt wird, so kann für u die von dieser Störung unabhängige Annäherung gesetzt werden; nämlich, unter der Voraussetzung dass die Zeit t von dem Durchgange des Pendels durch die Lothlinie angezählt wird:

$$u = u' \sin n't; \quad \sqrt{(u'u' - uu)} = u' \cos n't;$$

schreibt man, um abzukürzen z für $n't$, so ist die Schwingungzeit:

$$\frac{\pi}{n'} + \frac{\zeta}{n'} \times$$

$$\int \frac{d \left\{ \frac{b^{(2)} \cos B^{(2)} (1 - \cos 2z) + b^{(2)} \sin B^{(2)} \sin 2z + b^{(4)} \cos B^{(4)} (1 - \cos 4z) + \text{u. s. w.}}{\sin z} \right\}}{\cos z}$$

wo das Integral von $z = -\frac{1}{2}\pi$ bis $z = \frac{1}{2}\pi$ genommen wird.

Die bestimmten Integrale, welche hier vorkommen, haben die Formen

$$\int \frac{d \cdot \frac{1-\cos 2hz}{\sin z}}{\cos z} \quad \text{und} \quad \int \frac{d \cdot \frac{\sin 2hz}{\sin z}}{\cos z}.$$

Das erste ist, wenn wirklich differentiirt wird,

$$= 4h \int \frac{\sin 2hz}{\sin 2z}\, dz - \int \frac{1-\cos 2hz}{\sin z^2}\, dz;$$

[**128**] allein man hat

$$\frac{\sin 2hz}{\sin 2z} = \cos(2h-2)z + \cos(2h-6)z + \cos(2h-10)z + \ldots\ldots + \cos(-2h+2)z$$

$$\frac{1-\cos 2hz}{\sin z^2} = 2h + 4(h-1)\cos 2z + 4(h-2)\cos 4z + \ldots\ldots + 4\cos(2h-2)z$$

woraus hervorgeht, dass das zwischen den angegebenen Grenzen genommene Integral

$$\int \frac{\sin 2hz}{\sin 2z}\, dz$$

verschwindet wenn h eine gerade Zahl ist, allein $=\pi$ wird wenn h ungerade ist; ferner dass man

$$\int \frac{1-\cos 2hz}{\sin z^2}\, dz = 2h\pi$$

hat. Man erhält also

$$\int \frac{d \cdot \frac{1-\cos 2hz}{\sin z}}{\cos z} = 2h\{1-(-1)^h\} - 2h = (-1)^{h+1} . 2h.$$

Das zweite bestimmte Integral ergiebt durch theilweise Integration

$$\frac{2\sin 2hz}{\sin 2z} - \int \frac{\sin 2hz}{\cos z^2}\, dz;$$

der oben gegebene Ausdruck des ersten Gliedes zeigt, dass es, zwischen den angegebenen Grenzen genommen, verschwindet;

das zweite Glied verschwindet gleichfalls, indem das Differential, für $-z$ und $+z$ entgegengesetzte Werthe von gleicher Grösse hat. Man hat also

$$\int \frac{d \cdot \frac{\sin 2hz}{\sin z}}{\cos z} = 0.$$

Substituirt man diese Werthe der bestimmten Integrale in den Ausdruck der Schwingungszeit, so erhält man dieselbe

$$= \frac{\pi}{n'} + \frac{2\zeta\pi}{n'} \left\{ b^{(2)} \cos B^{(2)} - 2\, b^{(4)} \cos B^{(4)} + 3\, b^{(6)} \cos B^{(6)} \text{u.s.w.} \right\}$$

Verwechselt man nn mit $n'n'$ im Ausdrucke von ζ, welches erlaubt ist, so hat man

$$\zeta = \frac{m'}{2\, m(\mu + ss)};$$

[129] schreibt man ferner für u' seinen Ausdruck, und C für

$$b^{(2)} \cos B^{(2)} - 2\, b^{(4)} \cos B^{(4)} + 3\, b^{(6)} \cos B^{(6)} - \text{u. s. w.} \ldots .$$

so verwandelt sich der Ausdruck der Schwingnngszeit in

$$\sqrt{\frac{m(\mu - ss)}{\lambda\,(ms - m's')}} \left\{ 1 + \frac{m'C}{m(\mu + ss)} \right\};$$

oder die Länge des einfachen, in derselben Zeit schwingenden Pendels, nämlich das Quadrat der Schwingungszeit in λ multiplicirt, ist

$$\frac{\mu + \frac{2m'}{m} C + ss}{s\left(1 - \frac{m's'}{ms}\right)}.$$

Es geht hieraus hervor, dass eine das Pendel umgebende Flüssigkeit von sehr geringer Dichtigkeit, auf die Dauer sehr kleiner Schwingungen keinen anderen Einfluss hat, als dass sie die Schwerkraft vermindert und das Moment der Trägheit vermehrt. Wenn die Ausdehnung der Bewegungen der Flüssigkeit den Schwingungswinkeln des Pendels proportional ist, so ist diese Vermehrung des Moments der Trägheit sehr nahe beständig; im entgegengesetzten Falle hängt sie von den Schwingungswinkeln ab.



Beilage VII.

Bestimmung der einzelnen Theile der verschiedenen, bei den Versuchen angewandten Pendel, und Berechnung ihrer Zusammensetzung.

Das Gewicht, welches den folgenden Abwiegungen zum Grunde liegt, ist das Preussische Pfund von 7680 Gran, welches, nach Herrn *Eytelweins* sorgfältiger Bestimmung 467,7112 Grammen wiegt. Das Exemplar davon, welches ich benutzte, ist das von Messing gemachte Normalpfund der hiesigen Aichungscommission. Die Abtheilungen desselben erhielt ich dadurch, dass ich andere, näherungsweise richtige Gewichte von 12, 6, 3, 2, 1 Unzen, 240, 120, 60.... Gran zuerst untereinander ausglich, oder vielmehr ihre relativen Fehler bestimmte, dann das wahre Pfund damit wog, wodurch die absoluten Gewichte der einzelnen Stücke bekannt wurden.

[**130**] Die Pendelkugel von Messing, mit Einschluss der eingeschraubten Fadenklemme wog 11418,15 Gr.; die letztere allein 19,72. In destillirtem Wasser von 15°,8 *C.* Wärme, wogen Kugel und Klemme 10025,07, die letztere allein 17,30; dabei stand das Barometer, dessen Temperatur = 12°,5 *C.* war, auf 341,17 Linien, wodurch die beiden letzten Angaben, auf den leeren Raum reducirt, sich in 10023,63 und 17,30 verwandeln. Hieraus folgt, dass die Kugel mit der Klemme vereinigt 1394.52 Gr., die letztere allein 2,42 Gr. Wasser von der angegebenen Wärme aus dem Wege drängen; der Unterschied der von beiden eingenommenen Räume drängt also 1392,10 Gr. aus dem Wege.

Nach den Untersuchungen des Herrn *Hällström* (*Dissertatio de mutationibus voluminis aquae destillatae. Aboae 1802*) ist die Dichte des Wassers bei der angegebenen Temperatur = 0,9993053, das Maximum derselben = 1 gesetzt; also wird der Raum, welchen die Kugel bei 15°,8 *C.* Temperatur einnimmt, durch 1393,067 Gr. des dichtesten Wassers gefüllt, und ihr Raum bei der Temperatur des Eispunkts durch 1391,826 Gran. Hieraus ist das im 15. Artikel angegebene specifische Gewicht hervorgegangen.

Da das Kilogramm einen Cubus des dichtesten Wassers von 1 Decimeter Seite, im leeren Raume aufwiegt, so ist das Gewicht einer Cubiklinie des dichtesten Wassers

$$\frac{1000.7618}{467,7112\,(44,32959)^3} = 0,1884961 \text{ Gran},$$

wodurch man den Unterschied der Räume welche Kugel und Klemme, und die letztere allein, bei der Temperatur des Eispunkts, einnehmen = 7383,84 Cubiclinien findet. Dieser Raum ist aber kleiner als die ganze Kugel, denn es ist an der Stelle wo die Fadenklemme eingeschraubt wird, ein Segment abgeschliffen, dessen Basis ein Kreis von 2 Linien Halbmesser ist; ferner fehlt noch der Raum, welchen die Schraube an der Fadenklemme einnimmt, die man als einen Cylinder von 1,25 Linie Höhe und 0,75 Linie Halbmesser ansehen kann. Wenn a den Halbmesser der Kugel bezeichnet, so hat man daher

$$7383{,}84 = \frac{2}{3}\pi a^3 \left\{1 + \left(1 + \frac{2}{aa}\right)\sqrt{\left(1 - \frac{4}{aa}\right)}\right\} - \frac{45}{64}\pi$$

woraus der Halbmesser der Kugel, für die Temperatur des Eispunkts, $= 12{,}'082$ folgt.

---

[131]

Berechnung der Pendel für die erste Reihe der Versuche.

Ich werde die Pendel aus acht Theilen zusammengesetzt annehmen und die Gewichte derselben durch m, die Entfernung des Schwerpunkts eines jeden Theils vom Mittelpunkte der Bewegung durch s, das Moment der Trägheit desselben, auf eine horizontale, durch seinen Schwerpunkt gehende Axe bezogen, durch μ bezeichnen.

1. Das Messingblättchen, dessen Länge ich r nenne, und dessen Gewicht $= 0{,}01759\,r$ ist.

$$m^{(1)} = 0{,}01759 . r;\quad s^{(1)} = \tfrac{1}{2}\, r;\quad \mu^{(1)} = 0{,}001466 . r^3.$$

2. Die Klemme am Messingblättchen, mit der eingeschraubten oberen Fadenklemme zusammen, wiegt 40,49 Gran und ich habe ihren Schwerpunkt 3,56 Linien unter dem Ende des Messingblättchens gefunden, ihr Moment der Trägheit = 157.

$$m^{(2)} = 40{,}49;\quad s^{(2)} = r + 3{,}56;\quad \mu^{(2)} = 157.$$

3. Der Faden, dessen Länge ich durch r' bezeichne, und dessen Gewicht, für beide Pendel, 10,95 und 3,58 Gran ist. Die Fadenklemme in welcher er befestigt ist und die Klemme des Messingblättchens haben, zusammengeschraubt, eine Länge von 6,5 Linien; der Faden geht durch die erstere ganz hindurch



und ist am Ende der Schraube derselben, welche 3,25 Linien von der Spitze des Kegels dieser Fadenklemme entfernt ist, abgeschnitten; dasselbe findet an dem unteren, in die Kugel eingeschraubten Ende des Fadens statt. Der Anfang des Fadens ist also $r + 3,25$ Linien vom Mittelpunkte der Bewegung entfernt, und man hat für das lange Pendel:

$$m^{(3)} = 10,95; \quad s^{(3)} = r + 3,25 + \tfrac{1}{2} r'; \quad \mu^{(3)} = \frac{10,95}{12} r'r';$$

für das kurze:

$$m^{(3)} = 3,58; \quad s^{(3)} = r + 3,25 + \tfrac{1}{2} r'; \quad \mu^{(3)} = \frac{3,58}{12} r'r'.$$

4. Der Coincidenzcylinder, für das lange Pendel:

$$m^{(4)} = 3,81; \quad s^{(4)} = 1277,8; \quad \mu^{(4)} = 2;$$

für das kurze:

$$m^{(4)} = 3,69; \quad s^{(4)} = 413,8; \quad \mu^{(4)} = 2.$$

[**132**] 5. Die untere Fadenklemme, deren Schwerpunkt von dem Ende ihrer Schraube, also auch von dem des Fadens, 1,83 Linie entfernt ist,

$$m^{(5)} = 19,72; \quad s^{(5)} = r + 1,42 + r'; \quad \mu^{(5)} = 19.$$

6. Das abgeschliffene Segment der Kugel, welches ich als eine negative Masse betrachte. Der räumliche Inhalt eines Segments, dessen Basis, am Mittelpunkte einer Kugel vom Halbmesser a, den Winkel 2φ einschliesst, ist

$$\tfrac{4}{3} a^3 \pi \sin \tfrac{1}{2} \varphi^4 \{3 - 2 \sin \tfrac{1}{2} \varphi^2\};$$

also sein Gewicht, wenn das Gewicht einer Cubiclinie des Metalls durch Δ bezeichnet wird,

$$\tfrac{4}{3} \Delta a^3 \pi \sin \tfrac{1}{2} \varphi^4 \{3 - 2 \sin \tfrac{1}{2} \varphi^2\};$$

die Entfernung seines Schwerpunkts von der Basis

$$a \sin \tfrac{1}{2} \varphi^2 \frac{2 - \sin \tfrac{1}{2} \varphi^2}{3 - 2 \sin \tfrac{1}{2} \varphi^2};$$

das Moment der Trägheit auf den Schwerpunkt bezogen,

$$\frac{4 \Delta a^5 \pi \sin \tfrac{1}{2} \varphi^6}{3 - 2 \sin \tfrac{1}{2} \varphi^2} \left\{2 - \tfrac{11}{3} \sin \tfrac{1}{2} \varphi^2 + \tfrac{12}{5} \sin \tfrac{1}{2} \varphi^4 - \tfrac{3}{5} \sin \tfrac{1}{2} \varphi^6\right\}.$$

Setzt man in diesen Formeln $\sin\varphi = \frac{2}{12{,}082}$ und $\Delta = 8{,}19 \times 0{,}1884961 = 1{,}5437$ Gran, so findet man das Gewicht $= 1{,}63$ Gran; die Entfernung des Schwerpunkts von der Basis $= 0{,}06$ Linie; das Moment der Trägheit $= 1$. Hiernach ist für das abgeschliffene Segment der Kugel zu nehmen:

$$m^{(6)} = -1{,}63; \quad s^{(6)} = r + 1{,}94 + r'; \quad \mu^{(6)} = -1.$$

7. Das Loch in der Kugel; es ist von der Basis des Segments an gerechnet, 4 Linien tief gebohrt und hat 0,75 Linie Halbmesser. Da das Ende des Fadens $r + 3{,}25 + r'$ vom Mittelpunkte der Bewegung, und 1,25 Linie von der Basis des Segments entfernt ist, so findet man für das eingebohrte Loch:

$$m^{(7)} = -10{,}91; \quad s^{(7)} = r + 4 + r'; \quad \mu^{(7)} = -16.$$

8. Die Kugel, als vollständig betrachtet. Ihre Masse ist $= 11398{,}43 + 1{,}63 + 10{,}91 = 11410{,}97$ Gr.; ihr Mittelpunkt ist 11,9143 Linien von der Basis des Segments entfernt, woraus folgt:

$$m^{(8)} = 11410{,}97; \quad s^{(8)} = r + 13{,}91 + r'; \quad \mu^{(8)} = 666285.$$

[**133**] Ich habe hier nicht näher angegeben, wie ich die Schwerpunkte und Momente der Trägheit der Theile 2 und 5 gefunden habe; ich würde dabei weitläuftigere Erklärungen über die Figuren dieser Theile haben geben müssen, welche ich glaubte unterdrücken zu dürfen, da der Einfluss derselben auf das Endresultat der Versuche unbedeutend ist.

Die Länge des einfachen, mit dem zusammengesetzten in gleicher Zeit schwingenden Pendels, dieses als festen Körper angesehen, ist

$$l = \frac{\Sigma\mu + \Sigma mss}{\Sigma ms}$$

oder, wenn man die sich auf die Kugel beziehenden Theile dieses Ausdrucks besonders schreibt:

$$l = s^{(8)} + \frac{\Sigma\mu + \Sigma mss - s^{(8)}\Sigma ms}{m^{(8)}s^{(8)} + \Sigma ms}$$

wo Σmss und Σms sich auf die ersten 7 Theile beziehen. Schreibt man $s^{(8)} + c$ für l, so hat man also

$$c = \frac{\Sigma\mu - m^{(1)}s^{(1)}(s^{(8)} - s^{(1)}) - m^{(2)}s^{(2)}(s^{(8)} - s^{(2)}) - \text{u. s. w.}\ldots}{m^{(8)}s^{(8)} + m^{(1)}s^{(1)} + m^{(2)}s^{(2)} + \text{u. s. w.}\ldots}$$

Dieser Ausdruck enthält, ausser bekannten Längen und Gewichten, r und r', oder die Längen des Messingblättchens und des Fadens. Die erstere geht aus der gemessenen und bei den Versuchen angegebenen Entfernung des Schwerpunkts der oberen Klemme vom Aufhängepunkte des Pendels hervor, und ist immer zwischen 14,5 und 15 Linien, weshalb ich sie durch $14{,}5 + i$ bezeichnen werde; die andere ist nicht gemessen, sondern muss durch die ganze Pendellänge ausgedrückt werden. Bezeichnet man diese, so wie sie bei den Versuchen angegeben worden ist, durch $F + h$, wo $F = 442{,}40$ Linien, ferner h für das lange Pendel durch $862{,}6 + i'$ und für das kurze durch $-1{,}4 + i'$, so hat man durch die Ausdrücke der Entfernungen der Schwerpunkte der Theile (2) und (8) vom Mittelpunkte der Bewegung:

langes Pendel.		kurzes Pendel.
$r + 3{,}56 = 14{,}5 + i$	..... =	$14{,}5 + i$
$r + r' + 13{,}91 = 1305{,}00 + i'$	..... =	$441{,}00 + i'$

oder

$r = 10{,}94 + i$	.... =	$10{,}94 + i$
$r' = 1280{,}15 + i' - i$	..... =	$416{,}15 + i' - i$

[134] Substituirt man diese Ausdrücke von r und r', so findet man für das lange Pendel:

$m^{(1)} = 0{,}19$	$s^{(1)} = 5{,}47 + \frac{1}{2}i$
$m^{(2)} = 40{,}49$	$s^{(2)} = 14{,}50 + i$
$m^{(3)} = 10{,}95$	$s^{(3)} = 654{,}265 + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}i'$
$m^{(4)} = 3{,}81$	$s^{(4)} = 1277{,}80$
$m^{(5)} = 19{,}72$	$s^{(5)} = 1292{,}51 + i'$
$m^{(6)} = -1{,}63$	$s^{(6)} = 1293{,}03 + i'$
$m^{(7)} = -10{,}91$	$s^{(7)} = 1295{,}09 + i'$
$m^{(8)} = 11410{,}97$	$s^{(8)} = 1305{,}00 + i'$

$s^{(8)} - s^{(1)} = 1299{,}53 - \frac{1}{2}i + i'$	$\mu^{(1)} = 0$
$s^{(8)} - s^{(2)} = 1290{,}50 - i + i'$	$\mu^{(2)} = 157$
$s^{(8)} - s^{(3)} = 650{,}735 - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}i'$	$\mu^{(3)} = 1495390 + 2336{,}3\,(i' - i)$
$s^{(8)} - s^{(4)} = 27{,}20 + i'$	$\mu^{(4)} = 2$
$s^{(8)} - s^{(5)} = 12{,}49$	$\mu^{(5)} = 19$
$s^{(8)} - s^{(6)} = 11{,}97$	$\mu^{(6)} = -1$
$s^{(8)} - s^{(7)} = 9{,}91$	$\mu^{(7)} = -16$
	$\mu^{(8)} = 666285$

und für das kurze

$$
\begin{array}{llll}
m^{(1)} = & 0{,}19 & s^{(1)} = & 5{,}47 + \tfrac{1}{2}i \\
m^{(2)} = & 40{,}49 & s^{(2)} = & 14{,}50 + i \\
m^{(3)} = & 3{,}58 & s^{(3)} = & 222{,}265 + \tfrac{1}{2}i + \tfrac{1}{2}i' \\
m^{(4)} = & 3{,}69 & s^{(4)} = & 413{,}80 \\
m^{(5)} = & 19{,}72 & s^{(5)} = & 428{,}51 + i' \\
m^{(6)} = & -\ 1{,}63 & s^{(6)} = & 429{,}03 + i' \\
m^{(7)} = & -\ 10{,}91 & s^{(7)} = & 431{,}09 + i' \\
m^{(8)} = & 11410{,}97 & s^{(8)} = & 441{,}00 + i'
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
s^{(8)} - s^{(1)} = & 435{,}53 - \tfrac{1}{2}i + i' & \mu^{(1)} = & 0 \\
s^{(8)} - s^{(2)} = & 426{,}50 - i + i' & \mu^{(2)} = & 157 \\
s^{(8)} - s^{(3)} = & 218{,}735 - \tfrac{1}{2}i + \tfrac{1}{2}i' & \mu^{(3)} = & 51666 + 218{,}3\,(i' - i) \\
s^{(8)} - s^{(4)} = & 27{,}20 - i' & \mu^{(4)} = & 2 \\
s^{(8)} - s^{(5)} = & 12{,}49 & \mu^{(5)} = & 19 \\
s^{(8)} - s^{(6)} = & 11{,}97 & \mu^{(6)} = & -\ 1 \\
s^{(8)} - s^{(7)} = & 9{,}91 & \mu^{(7)} = & -\ 16 \\
 & & \mu^{(8)} = & 666285
\end{array}
$$

Hieraus ergiebt sich für das lange Pendel:

$$c = -\ 0{,}^{L}23768 - 0{,}00363\,i - 0{,}00051\,i'$$

und für das kurze:

$$c = +\ 0{,}^{L}03992 - 0{,}00337\,i - 0{,}00061\,i'.$$

[**135**] Indessen sind diese Formeln nicht vollständig, indem sie die Pendel als feste Körper voraussetzen und *Laplace* schon bemerkt hat, dass man die Drehungen der einzelnen Theile um einander, insofern der sehr biegsame Faden ihnen kein merkliches Hinderniss ist, nicht vernachlässigen darf. Man überzeugt sich aber leicht, dass die Theile (1) bis (4) in dieser Beziehung ohne merklichen Einfluss sind; bei den übrigen, welche einen festen Körper bilden, ist dieses nicht der Fall, und überdies kann man nicht bezweifeln, dass die, vergleichungsweise mit der Steifheit des Fadens sehr grosse Masse dieses Körpers, hinreicht, wirklich eine Biegung des Fadens hervorzubringen. Um den Einfluss derselben zu untersuchen, werde ich annehmen, dass der erwähnte Körper an einem Faden ohne Masse, von der Länge a befestigt ist. Den Winkel des Fadens mit der Lothlinie bezeichne ich durch u, den Winkel der durch den Befestigungspunkt und den Schwerpunkt des Körpers gehenden geraden, mit der Lothlinie, durch u'; die Entfernung eines Massentheilchens

dm des Körpers, vom Befestigungspunkte, durch r; den Winkel dieses r mit der durch den Schwerpunkt gehenden Linie, in der Ebene der Bewegung genommen, durch ψ. Wenn die Coordinaten x lothrecht, y wagrecht genommen werden, so folgt aus der allgemeinen Gleichung der Bewegnng um eine feste Axe, nämlich:

$$0 = \int dm \left\{ \left(\frac{d^2 x}{dt^2} - \pi^2 \lambda \right) \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \delta y \right\}$$

durch Substitution von

$$x = a \cos u + r \cos (u' + \psi)$$
$$y = a \sin u + r \sin (u' + \psi)$$

und dadurch dass man die in δu nnd $\delta u'$ multiplicirten Theile des Ausdrncks abgesondert $= 0$ setzt:

$$0 = \int dm \left\{ a \frac{d^2 u}{dt^2} + r \cos (u' - u + \psi) \frac{d^2 u'}{dt^2} \right.$$
$$\left. - r \sin (u' - u + \psi) \left(\frac{du'}{dt} \right)^2 + \pi^2 \lambda \sin u \right\}$$

$$0 = \int dm \left\{ ar \cos (u' - u + \psi) \frac{d^2 u}{dt^2} \right.$$
$$\left. + ar \sin (u' - u + \psi) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + rr \frac{d^2 u'}{dt^2} + \pi^2 \lambda r \sin (u' + \psi) \right\}$$

Allein, wenn s die Entfernung des Schwerpunkts des Körpers von seinem Befestigungspunkte am Faden, $m\mu$ sein Moment der Trägheit in Beziehung auf den Schwerpunkt bezeichnen, so hat man:

$$[136] \quad \int dm . r \cos (u' - u + \psi) = ms \cos (u' - u)$$
$$\int dm . r \sin (u' - u + \psi) = ms \sin (u' - u)$$
$$\int dm . rr = m (\mu + ss)$$

wodurch die beiden Gleichungen sich in

$$0 = a \frac{d^2 u}{dt^2} + s \cos (u' - u) \frac{d^2 u'}{dt^2} - s \sin (u' - u) \left(\frac{du'}{dt} \right)^2$$
$$+ \pi^2 \lambda \sin u$$

$$0 = as (u' - u) \frac{d^2 u}{dt^2} + as \sin (u' - u) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + (\mu + ss) \frac{d^2 u'}{dt^2}$$
$$+ \pi^2 \lambda s \sin u'$$

verwandeln. Man kann aber, für den Fall sehr kleiner Schwingungen, die Glieder der dritten Ordnung von u und u' weglassen, und erhält dann:

$$0 = a\frac{d^2u}{dt^2} + s\frac{d^2u'}{dt^2} + \pi^2\lambda u$$

$$0 = as\frac{d^2u}{dt^2} + (\mu + ss)\frac{d^2u'}{dt^2} + \pi^2\lambda s . u'.$$

Diesen Gleichungen leistet man Genüge durch

$$u = k\sin(nt + K), \quad u' = k'\sin(nt + K)$$

wodurch man erhält:

$$0 = -knna \quad -k'nns \quad + k\pi^2\lambda$$

$$0 = -knnas - k'nn(\mu + ss) + k'\pi^2\lambda s.$$

Eliminirt man k und k', so erhält man die Gleichung

$$0 = \frac{\pi^4\lambda^2}{n^4} - \frac{\pi^2\lambda}{n^2}\left\{a + \frac{\mu + ss}{s}\right\} + \frac{a\mu}{s},$$

deren Auflösung

$$\frac{\pi^2\lambda}{nn} = \frac{a + \frac{\mu + ss}{s}}{2}\left\{1 \pm \sqrt{\left(1 - \frac{4as\mu}{(as + \mu + ss)^2}\right)}\right\}$$

giebt.

Bezeichnet man die beiden Werthe von nn, welche dieser Ausdruck enthält, durch nn und $n'n'$, so hat man

$$u = k\ \sin(nt + K) + l\ \sin(n't + L)$$

$$u' = k'\sin(nt + K) + l'\sin(n't + L)$$

wo zwischen den vier Constanten k, k', l, l' die oben gefundenen Relationen

[137]
$$\frac{k'}{k} = \frac{\pi^2\lambda}{nns} - \frac{a}{s}$$

$$\frac{l'}{l} = \frac{\pi^2\lambda}{n'n's} - \frac{a}{s}$$

stattfinden, also das Integral die gehörige Anzahl Constanten enthält.

Bei der Beobachtung der Schwingungszeit des Pendels, wird bekanntlich das zweite Glied des Ausdrucks von u unmerklich,

indem es eine sehr kurze Periode hat und überdies durch den Widerstand der Luft bald vernichtet wird. Die Zeit der Schwingung ist dann die, in welcher der Winkel nt um π wächst, oder sie ist $= \frac{\pi}{n}$; die ihr entsprechende einfache Pendellänge aber ist

$$\frac{\lambda\pi^2}{nn} = \frac{a + \frac{\mu + ss}{s}}{2}\left\{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{4as\mu}{(as + \mu + ss)^2}\right)}\right\}.$$

Wäre das Pendel ein fester Körper, so würde die Länge des einfachen Pendels von gleicher Schwingungszeit

$$= a + s + \frac{\mu}{a + s}$$

sein; sie ist aber, wenn man sie nach den Potenzen von μ entwickelt,

$$= a + s + \frac{\mu}{a + s} + \frac{a\mu^2}{s(a + s)^3} - \frac{a\mu^3}{ss(a + s)^4} \text{ u. s. w.} \ldots$$

Es ist daher dem in der ersteren Hypothese berechneten c, noch

$$+ \frac{a\mu^2}{s(a + s)^3} - \frac{a\mu^3}{ss(a + s)^4} \text{ u. s. w.} \ldots$$

hinzuzufügen.

Setzt man in diese Formel die aus den oben gemachten Angaben folgenden Werthe von μ und s, nämlich $\mu = 58{,}50$ und $s = 12{,}48$, so erhält man die von der Biegsamkeit des Pendels herrührende Verbesserung von c, für das lange Pendel $= + 0^L{,}00016$ und für das kurze $= + 0^L{,}00137$, und damit die vollständigen Ausdrücke

für das lange Pendel $c = - 0^L{,}23752 - 0{,}00363\,i - 0{,}00051\,.\,i'$
für das kurze Pendel $c = + 0^L{,}01129 - 0{,}00337\,i - 0{,}00064\,.\,i'$.

Berechnung der Pendel für die zweite Reihe der Versuche.

a. Pendel mit der Schneide. Um das Moment der Trägheit der Schneide und ihres Rahmens zu finden, deren Figur zu zusammengesetzt ist um [138] sie mit aller wünschenswerthen

Genauigkeit berechnen zu können, habe ich sowohl die Schneide und ihren Rahmen allein, als auch in Verbindung mit einem angeschraubten Cylinder von Messing schwingen lassen, in welchem bei den Versuchen die Fadenklemme eingeschraubt wird. Das Gewicht der Schneide und ihres Rahmens ist = 194,39 Gran, und sie vollendete eine Schwingung in 2,9042 MZ., welcher die Länge eines einfachen Pendels $l = 3718{,}0$ Linien entspricht. Als aber der Cylinder angeschraubt war, dessen Gewicht = 26,81 Gran ist, dessen Schwerpunkt 7,78 Linien unter der Schneide liegt, und dessen Moment der Trägheit, für eine durch seinen Schwerpunkt gehende Axe ich = 92,1 gefunden habe, war die Dauer einer Schwingung = 0,2971 MZ.; oder die correspondirende einfache Pendellänge = 38,91 Linien.

Bezeichnet man das gesuchte Moment der Trägheit der Schneide und ihres Rahmens durch μ, die unbekannte Entfernung des Schwerpunkts beider von der Schneide, durch s, so hat man die beiden Gleichungen:

$$3718{,}0 = \frac{\mu + 194{,}39 \,.\, ss}{194{,}39 \,.\, s}$$

$$38{,}91 = \frac{\mu + 194{,}39\, ss + 92{,}1 + 26{,}81\,(7{,}78)^2}{194{,}39\, s + 26{,}81 \,.\, 7{,}78}$$

und ihre Auflösung ergiebt $\mu = 6469$, $s = 0{,}0089502$. Ferner ist noch nöthig zu wissen, dass, wenn die Fadenklemme in den Cylinder am Rahmen der Schraube eingeschraubt ist, ihr Schwerpunkt 3,78 Linien niedriger ist als der Schwerpunkt dieses Cylinders. Uebrigens gelten alle bei der ersten Reihe der Versuche angegebenen Bestimmungen der Theile der Pendel auch hier, bis auf das Gewicht der Fäden, welches, da neue etwas längere Fäden genommen wurden, eine Veränderung erlitt. Man hat also für das lange Pendel $(i' = h - 862{,}52)$:

$$\begin{array}{ll}
m^{(1)} = \begin{cases} 194{,}39 \\ 26{,}81 \end{cases} & s^{(1)} = \begin{cases} 0{,}00895 \\ 7{,}78 \end{cases} \\
m^{(2)} = 19{,}72 & s^{(2)} = 11{,}56 \\
m^{(3)} = 11{,}06 & s^{(3)} = 652{,}035 + \tfrac{1}{2} i' \\
m^{(4)} = 3{,}81 & s^{(4)} = 1277{,}80 \\
m^{(5)} = 19{,}72 & s^{(5)} = 1292{,}51 + i' \\
m^{(6)} = -\ 1{,}63 & s^{(6)} = 1293{,}03 + i' \\
m^{(7)} = -\ 10{,}91 & s^{(7)} = 1295{,}09 + i' \\
m^{(8)} = 11410{,}97 & s^{(8)} = 1305{,}00 + i'
\end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
s^{(8)} - s^{(1)} = \begin{cases} 1304{,}99 & + i' \\ 1297{,}22 & + i' \end{cases} & \mu^{(1)} = \begin{cases} 6469 \\ 92 \end{cases} \\
s^{(8)} - s^{(2)} = 1293{,}41 \; + i' & \mu^{(2)} = 19 \\
s^{(8)} - s^{(3)} = 652{,}965 + \tfrac{1}{2} i' & \mu^{(3)} = 1520955 + 2368{,}0\, i' \\
s^{(8)} - s^{(4)} = 27{,}20 \; + i' & \mu^{(4)} = 2 \\
s^{(8)} - s^{(5)} = 12{,}49 & \mu^{(5)} = 19 \\
s^{(8)} - s^{(6)} = 11{,}97 & \mu^{(6)} = -\;1 \\
s^{(8)} - s^{(7)} = 9{,}91 & \mu^{(7)} = -\;16 \\
 & \mu^{(8)} = 666285
\end{array}
$$

[139] und für das kurze ($i' = h + 1{,}48$):

$$
\begin{array}{ll}
m^{(1)} = \begin{cases} 194{,}39 \\ 26{,}81 \end{cases} & s^{(1)} = \begin{cases} 0{,}00895 \\ 7{,}78 \end{cases} \\
m^{(2)} = 19{,}72 & s^{(2)} = 11{,}56 \\
m^{(3)} = 3{,}60 & s^{(3)} = 220{,}035 + \tfrac{1}{2} i' \\
m^{(4)} = 3{,}69 & s^{(4)} = 413{,}80 \\
m^{(5)} = 19{,}72 & s^{(5)} = 428{,}51 \; + i' \\
m^{(6)} = -\;1{,}63 & s^{(6)} = 429{,}03 \; + i' \\
m^{(7)} = -\;10{,}91 & s^{(7)} = 431{,}09 \; + i' \\
m^{(8)} = 11410{,}97 & s^{(8)} = 441{,}00 \; + i'
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
s^{(8)} - s^{(1)} = \begin{cases} 140{,}99 & + i' \\ 433{,}22 & + i' \end{cases} & \mu^{(1)} = \begin{cases} 6469 \\ 92 \end{cases} \\
s^{(8)} - s^{(2)} = 429{,}44 \; + i' & \mu^{(2)} = 19 \\
s^{(8)} - s^{(3)} = 220{,}965 + \tfrac{1}{2} i' & \mu^{(3)} = 53074 + 252{,}4\, i' \\
s^{(8)} - s^{(4)} = 27{,}20 \; + i' & \mu^{(4)} = 2 \\
s^{(8)} - s^{(5)} = 12{,}49 & \mu^{(5)} = 19 \\
s^{(8)} - s^{(6)} = 11{,}97 & \mu^{(6)} = -\;1 \\
s^{(8)} - s^{(7)} = 9{,}91 & \mu^{(7)} = -\;16 \\
 & \mu^{(8)} = 666285
\end{array}
$$

b. Pendel mit der Klemme. Das Messingblättchen war 6,35 Linien lang. Uebrigens waren beide Pendel, bis auf den Faden, in demselben Zustande wie bei der ersten Reihe der Versuche. Man hat also für das lange Pendel ($i' = h - 862{,}56$):

$$
\begin{array}{ll}
m^{(1)} = 0{,}11 & s^{(1)} = 3{,}18 \\
m^{(2)} = 40{,}19 & s^{(2)} = 8{,}91 \\
m^{(3)} = 11{,}06 & s^{(3)} = 651{,}97 + \tfrac{1}{2} i' \\
m^{(4)} = 3{,}81 & s^{(4)} = 1277{,}80 \\
m^{(5)} = 19{,}72 & s^{(5)} = 1292{,}51 + i' \\
m^{(6)} = -\;1{,}63 & s^{(6)} = 1293{,}03 + i' \\
m^{(7)} = -\;10{,}91 & s^{(7)} = 1295{,}09 + i' \\
m^{(8)} = 11410{,}97 & s^{(8)} = 1305{,}00 + i'
\end{array}
$$

$s^{(8)} - s^{(1)} = 1301{,}82 + i'$	$\mu^{(1)} = 0$
$s^{(8)} - s^{(2)} = 1295{,}09 + i'$	$\mu^{(2)} = 157$
$s^{(8)} - s^{(3)} = 653{,}03 + \frac{1}{2} i'$	$\mu^{(3)} = 1521263 + 2368{,}2\, i'$
$s^{(8)} - s^{(4)} = 27{,}20 + i'$	$\mu^{(4)} = 2$
$s^{(8)} - s^{(5)} = 12{,}49$	$\mu^{(5)} = 19$
$s^{(8)} - s^{(6)} = 11{,}97$	$\mu^{(6)} = -\ 1$
$s^{(8)} - s^{(7)} = 9{,}91$	$\mu^{(7)} = -\ 16$
	$\mu^{(8)} = 666285$

und für das kurze $(i' = h + 1{,}44)$:

$m^{(1)} = 0{,}11$	$s^{(1)} = 3{,}18$
$m^{(2)} = 40{,}49$	$s^{(2)} = 9{,}91$
$m^{(3)} = 3{,}60$	$s^{(3)} = 219{,}97 + \frac{1}{2} i'$
$m^{(4)} = 3{,}69$	$s^{(4)} = 413{,}80$
$m^{(5)} = 19{,}72$	$s^{(5)} = 428{,}51 + i'$
$m^{(6)} = -\ 1{,}63$	$s^{(6)} = 429{,}03 + i'$
$m^{(7)} = -\ 10{,}91$	$s^{(7)} = 431{,}09 + i'$
$m^{(8)} = 11410{,}97$	$s^{(8)} = 441{,}00 + i'$

$s^{(8)} - s^{(1)} = 437{,}82 + i'$	$\mu^{(1)} = 0$
$s^{(8)} - s^{(2)} = 431{,}09 + i'$	$\mu^{(2)} = 157$
$s^{(8)} - s^{(3)} = 221{,}03 + \frac{1}{2} i'$	$\mu^{(3)} = 53107 + 252{,}4\, i'$
$s^{(8)} - s^{(4)} = 27{,}20 + i'$	$\mu^{(4)} = 2$
$s^{(8)} - s^{(5)} = 12{,}49$	$\mu^{(5)} = 19$
$s^{(8)} - s^{(6)} = 11{,}97$	$\mu^{(6)} = -\ 1$
$s^{(8)} - s^{(7)} = 9{,}91$	$\mu^{(7)} = -\ 16$
	$\mu^{(8)} = 666285$

c. Pendel mit dem Abwickelungscylinder. Das Messingblättchen war 6,84 Linien lang. Aus der Beschreibung der zu diesen Versuchen angewandten Einrichtung, im 18. Artikel, geht hervor, dass die Axe des Abwickelungscylinders, welcher mit seiner Oberfläche auf der [**140**] horizontalen Ebene liegt auf welcher auch die Schneide und die Klemme ruhen, um seinen Halbmesser höher ist, als bei den früheren Versuchen. Dieses hat zur Folge, dass die Scale, und auch der Coincidenzcylinder, von dem Mittelpunkte der Bewegung um 0,5 Linie entfernter sind. Uebrigens ist zwischen beiden Pendeln und den in der ersten Reihe der Versuche angewandten, kein Unterschied, ausser in der Länge und dem Gewichte der Fäden. Man hat also für das lange Pendel $(i' = h - 862{,}06)$:

$$\begin{array}{llll}
m^{(1)} = & 0,12 & s^{(1)} = & 3,42 \\
m^{(2)} = & 40,49 & s^{(2)} = & 10,40 \\
m^{(3)} = & 11,06 & s^{(3)} = & 652,215 + \frac{1}{2} i' \\
m^{(4)} = & 3,81 & s^{(4)} = & 1278,30 \\
m^{(5)} = & 19,72 & s^{(5)} = & 1292,51 + i' \\
m^{(6)} = & -\ 1,63 & s^{(6)} = & 1293,03 + i' \\
m^{(7)} = & -\ 10,91 & s^{(7)} = & 1295,09 + i' \\
m^{(8)} = & 11410,97 & s^{(8)} = & 1305,00 + i'
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
s^{(8)} - s^{(1)} = & 1301,58 + i' & \mu^{(1)} = & 0 \\
s^{(8)} - s^{(2)} = & 1294,60 + i' & \mu^{(2)} = & 157 \\
s^{(8)} - s^{(3)} = & 652,785 + \frac{1}{2} i' & \mu^{(3)} = & 1520103 + 2367,3\, i' \\
s^{(8)} - s^{(4)} = & 26,70 + i' & \mu^{(4)} = & 2 \\
s^{(8)} - s^{(5)} = & 12,49 & \mu^{(5)} = & 19 \\
s^{(8)} - s^{(6)} = & 11,97 & \mu^{(6)} = & -\ 1 \\
s^{(8)} - s^{(7)} = & 9,91 & \mu^{(7)} = & -\ 16 \\
 & & \mu^{(8)} = & 666285
\end{array}$$

und für das kurze ($i' = h + 1,94$):

$$\begin{array}{llll}
m^{(1)} = & 0,12 & s^{(1)} = & 3,42 \\
m^{(2)} = & 40,49 & s^{(2)} = & 10,40 \\
m^{(3)} = & 3,60 & s^{(3)} = & 220,215 + \frac{1}{2} i' \\
m^{(4)} = & 3,69 & s^{(4)} = & 414,30 \\
m^{(5)} = & 19,72 & s^{(5)} = & 428,51 + i' \\
m^{(6)} = & -\ 1,63 & s^{(6)} = & 429,03 + i' \\
m^{(7)} = & -\ 10,91 & s^{(7)} = & 431,09 + i' \\
m^{(8)} = & 11410,97 & s^{(8)} = & 441,00 + i'
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
s^{(8)} - s^{(1)} = & 437,58 + i' & \mu^{(1)} = & 0 \\
s^{(8)} - s^{(2)} = & 430,60 + i' & \mu^{(2)} = & 157 \\
s^{(8)} - s^{(3)} = & 220,785 + \frac{1}{2} i' & \mu^{(3)} = & 52985 + 252,2\, i' \\
s^{(8)} - s^{(4)} = & 26,70 + i' & \mu^{(4)} = & 2 \\
s^{(8)} - s^{(5)} = & 12,49 & \mu^{(5)} = & 19 \\
s^{(8)} - s^{(6)} = & 11,97 & \mu^{(6)} = & -\ 1 \\
s^{(8)} - s^{(7)} = & 9,91 & \mu^{(7)} = & -\ 16 \\
 & & \mu^{(8)} = & 666285
\end{array}$$

Aus diesen Angaben folgt für die sechs angewandten Pendel:

$$\text{Schneide} \ldots\ldots \begin{cases} \text{langes Pendel } c = -\ 0,22586 - 0,00052 . i' \\ \text{kurzes} \text{ —— } c = +\ 0,05355 - 0,00064 . i' \end{cases}$$

$$\text{Klemme} \ldots\ldots \begin{cases} \text{langes Pendel } c = -\ 0,22307 - 0,00052 . i' \\ \text{kurzes} \text{ —— } c = +\ 0,05544 - 0,00061 . i' \end{cases}$$

Abwickelungs-cylinder..... $\begin{cases}\text{langes Pendel } c = -0{,}22471 - 0{,}00052 \, . i' \\ \text{kurzes} \quad \text{——} \quad c = +0{,}05389 - 0{,}00064 \, . i'\end{cases}$

Fügt man noch die von der Biegsamkeit des Fadens abhängige Verbesserung hinzu, so erhält man die vollständigen, zur Reduction der Beobachtungen angewandten Formeln:

[141]

Schneide ...... $\begin{cases}\text{langes Pendel } c = -0{,}22570 - 0{,}00052 \, . i' \\ \text{kurzes} \quad \text{——} \quad c = +0{,}05492 - 0{,}00064 \, . i'\end{cases}$

Klemme .... $\begin{cases}\text{langes Pendel } c = -0{,}22291 - 0{,}00052 \, . i' \\ \text{kurzes} \quad \text{——} \quad c = +0{,}05681 - 0{,}00064 \, . i'\end{cases}$

Abwickelungs-cylinder..... $\begin{cases}\text{langes Pendel } c = -0{,}22455 - 0{,}00052 \, . i' \\ \text{kurzes} \quad \text{——} \quad c = +0{,}05526 - 0{,}00064 \, . i'\end{cases}$

Berechnung der Pendel für die dritte Reihe der Versuche.

Die Kugel von Elfenbein, womit diese Reihe von Versuchen gemacht wurde, wiegt, mit der eingeschraubten Fadenklemme zusammen (auf den leeren Raum reducirt) 2481,26 Gran. Im dichtesten Wasser, dessen Temperatur genau dieselbe ist, in welcher die Abwiegung gemacht wurde, wiegt sie 1098,50 Gran, woraus das specifische Gewicht der vereinigten Kugel und Klemme = 1,79443 folgt, so wie es im 15. Artikel angegeben worden ist.

Nachdem das Loch in der Kugel, in welches die Klemme eingeschraubt wird, mit Wachs ausgefüllt war, wog sie im leeren Raume 2461,80 Gran, und im dichtesten Wasser 1081,38 Gran. Sie drängte also 1380,42 Gran des dichtesten Wassers aus dem Wege, woraus, nach dem oben angegebenen Gewichte einer Cubiclinie des dichtesten Wassers, ihr Halbmesser = 12,047 Linien folgt. Da die Versuche dieser Reihe, sehr nahe in derselben Temperatur gemacht wurden, in welcher die Kugel in Wasser gewogen wurde, so behielt ich den unmittelbar gefundenen Werth des Halbmessers, bei der Reduction der Versuche unverändert bei.

Das Loch in dieser Kugel ist dem in der Kugel von Messing befindlichen gleich, so dass man die Masse $m^{(6)}$ und $m^{(7)}$ erhält, wenn man ihre Werthe für die Kugel von Messing, im Verhältnisse der specifischen Gewichte = 8,19 : 1,783 verkleinert.

Allein da der Halbmesser der Kugel von Elfenbein 0,035 kleiner ist als der der Kugel von Messing, so wird der Ausdruck von $s^{(8)}$, welcher vorher $r + 13,91 + r'$ war, ein wenig geändert und zwar $r + 13,88 + r'$. Die Länge des Messingblättchens, bei den Versuchen mit dem Abwickelungscylinder, war 6,48 Linien; bei der Anwendung der Schneide war diese in demselben Zustande, in welchem sie bei den früheren Versuchen war. Die Fäden, feiner als früher, wogen 6,28 und 2,04 Gran. Man hat daher zur Berechnung der Reduction auf das einfache Pendel folgende Data:

[**142**] *a.* Pendel mit dem Abwickelungscylinder.

Für das lange ($i' = h - 862,58$)

$$
\begin{array}{ll}
m^{(1)} = 0,11 & s^{(1)} = 3,24 \\
m^{(2)} = 40,49 & s^{(2)} = 10,04 \\
m^{(3)} = 6,28 & s^{(3)} = 652,05 + \tfrac{1}{2} i' \\
m^{(4)} = 3,81 & s^{(4)} = 1278,30 \\
m^{(5)} = 19,72 & s^{(5)} = 1292,54 + i' \\
m^{(6)} = -\ 0,35 & s^{(6)} = 1293,06 + i' \\
m^{(7)} = -\ 2,38 & s^{(7)} = 1295,12 + i' \\
m^{(8)} = 2464,27 & s^{(8)} = 1305,00 + i'
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
s^{(8)} - s^{(1)} = 1301,76 + i' & \mu^{(1)} = 0 \\
s^{(8)} - s^{(2)} = 1294,96 + i' & \mu^{(2)} = 157 \\
s^{(8)} - s^{(3)} = 652,95 + \tfrac{1}{2} i' & \mu^{(3)} = 863657 + 1314,6\, i' \\
s^{(8)} - s^{(4)} = 26,70 + i' & \mu^{(4)} = 2 \\
s^{(8)} - s^{(5)} = 12,46 & \mu^{(5)} = 19 \\
s^{(8)} - s^{(6)} = 11,94 & \mu^{(6)} = 0 \\
s^{(8)} - s^{(7)} = 9,88 & \mu^{(7)} = -\ 4 \\
 & \mu^{(8)} = 143056
\end{array}
$$

für das kurze ($i' = h + 1,42$)

$$
\begin{array}{ll}
m^{(1)} = 0,11 & s^{(1)} = 3,24 \\
m^{(2)} = 40,49 & s^{(2)} = 10,04 \\
m^{(3)} = 2,04 & s^{(3)} = 220,05 + \tfrac{1}{2} i' \\
m^{(4)} = 3,69 & s^{(4)} = 414,30 \\
m^{(5)} = 19,72 & s^{(5)} = 428,54 + i' \\
m^{(6)} = -\ 0,35 & s^{(6)} = 429,06 + i' \\
m^{(7)} = -\ 2,38 & s^{(7)} = 431,12 + i' \\
m^{(8)} = 2464,27 & s^{(8)} = 441,00 + i'
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
s^{(8)} - s^{(1)} = 437{,}76 + i' & \mu^{(1)} = 0 \\
s^{(8)} - s^{(2)} = 430{,}96 + i' & \mu^{(2)} = 157 \\
s^{(8)} - s^{(3)} = 220{,}95 + \tfrac{1}{2}\, i' & \mu^{(3)} = 30079 + 143{,}0 \,.\, i' \\
s^{(8)} - s^{(4)} = 26{,}70 + i' & \mu^{(4)} = 2 \\
s^{(8)} - s^{(5)} = 12{,}46 & \mu^{(5)} = 19 \\
s^{(8)} - s^{(6)} = 11{,}94 & \mu^{(6)} = 0 \\
s^{(8)} - s^{(7)} = 9{,}88 & \mu^{(7)} = -4 \\
 & \mu^{(8)} = 143056
\end{array}
$$

b. Pendel mit der Schneide.

Für das lange ($i' = h - 862{,}58$)

$$
\begin{array}{ll}
m^{(1)} = \begin{cases} 194{,}39 \\ 26{,}81 \end{cases} & s^{(1)} = \begin{cases} 0{,}00895 \\ 7{,}78 \end{cases} \\
m^{(2)} = 19{,}82 & s^{(2)} = 11{,}56 \\
m^{(3)} = 6{,}28 & s^{(3)} = 652{,}05 + \tfrac{1}{2}\, i' \\
m^{(4)} = 3{,}81 & s^{(4)} = 1277{,}80 \\
m^{(5)} = 19{,}72 & s^{(5)} = 1292{,}54 + i' \\
m^{(6)} = -0{,}35 & s^{(6)} = 1293{,}06 + i' \\
m^{(7)} = -2{,}38 & s^{(7)} = 1295{,}12 + i' \\
m^{(8)} = 2464{,}27 & s^{(8)} = 1305{,}00 + i'
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
s^{(8)} - s^{(1)} = \begin{cases} 1304{,}99 + i' \\ 1297{,}22 + i' \end{cases} & \mu^{(1)} = \begin{cases} 6469 \\ 92 \end{cases} \\
s^{(8)} - s^{(2)} = 1293{,}44 + i' & \mu^{(2)} = 19 \\
s^{(8)} - s^{(3)} = 652{,}95 + \tfrac{1}{2}\, i' & \mu^{(3)} = 863657 + 1344{,}6 \,.\, i' \\
s^{(8)} - s^{(4)} = 27{,}20 + i' & \mu^{(4)} = 2 \\
s^{(8)} - s^{(5)} = 12{,}46 & \mu^{(5)} = 19 \\
s^{(8)} - s^{(6)} = 11{,}94 & \mu^{(6)} = 0 \\
s^{(8)} - s^{(7)} = 9{,}88 & \mu^{(7)} = -4 \\
 & \mu^{(8)} = 143056
\end{array}
$$

für das kurze ($i' = h + 1{,}42$)

$$
\begin{array}{ll}
m^{(1)} = \begin{cases} 194{,}39 \\ 26{,}81 \end{cases} & s^{(1)} = \begin{cases} 0{,}00895 \\ 7{,}78 \end{cases} \\
m^{(2)} = 19{,}72 & s^{(2)} = 11{,}56 \\
m^{(3)} = 2{,}04 & s^{(3)} = 220{,}05 + \tfrac{1}{2}\, i' \\
m^{(4)} = 3{,}69 & s^{(4)} = 413{,}80 \\
m^{(5)} = 19{,}72 & s^{(5)} = 428{,}54 + i' \\
m^{(6)} = -0{,}35 & s^{(6)} = 429{,}06 + i' \\
m^{(7)} = -2{,}38 & s^{(7)} = 431{,}12 + i' \\
m^{(8)} = 2464{,}27 & s^{(8)} = 441{,}00 + i'
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
s^{(8)} - s^{(1)} = \begin{cases} 440{,}99 + i' \\ 133{,}22 + i' \end{cases} & \mu^{(1)} = \begin{cases} 6469 \\ 92 \end{cases} \\
s^{(8)} - s^{(2)} = 429{,}44 + i' & \mu^{(2)} = 19 \\
s^{(8)} - s^{(3)} = 220{,}95 + \tfrac{1}{2} i' & \mu^{(3)} = 30079 + 143{,}0 . i' \\
s^{(8)} - s^{(4)} = 27{,}20 + i' & \mu^{(4)} = 2 \\
s^{(8)} - s^{(5)} = 12{,}46 & \mu^{(5)} = 19 \\
s^{(8)} - s^{(6)} = 11{,}94 & \mu^{(6)} = 0 \\
s^{(8)} - s^{(7)} = 9{,}88 & \mu^{(7)} = -4 \\
 & \mu^{(8)} = 143056
\end{array}
$$

[**143**] Hieraus folgt, für die vier angewandten Pendel:

Abwickelungs-cylinder..... {langes Pendel $c = -0{,}^{L}80241 - 0{,}00193 . i'$; kurzes —— $c = -0{,}21471 - 0{,}00176 . i'$}

Schneide...... {langes Pendel $c = -0{,}81372 - 0{,}00193 . i'$; kurzes —— $c = -0{,}22197 - 0{,}00178 . i'$}

Die Einwirkung der Biegsamkeit des Fadens, ist für das lange Pendel $= +0{,}^{L}00016$ und für das kurze $+0{,}^{L}00138$. Also sind die vollständigen Formeln:

Abwickelungs-cylinder..... {langes Pendel $c = -0{,}^{L}80225 - 0{,}00193 . i'$; kurzes —— $c = -0{,}21333 - 0{,}00176 . i'$}

Schneide...... {langes Pendel $c = -0{,}81356 - 0{,}00193 . i'$; kurzes —— $c = -0{,}22059 - 0{,}00178 . i'$}

Beilage VIII.

Untersuchung des Einflusses der Ungleichheiten des Fadens auf die Reduction auf das einfache Pendel.

Ich nehme den Anfangspunkt des Fadens in der Entfernung $= r$ vom Mittelpunkte der Bewegung an, seine Länge $= r'$, seinen Querschnitt in der Entfernung x von seiner Mitte $= \varphi x$ und das Gewicht einer Cubiclinie seiner Materie $= \varDelta$. Nach diesen Bezeichnungen ist das Gewicht des ganzen Fadens

$$m = \varDelta \int \varphi x . dx;$$

das Product des Gewichts in die Entfernung des Schwerpunkts des Fadens vom Aufhängepunkte

$$ms = \varDelta \int \varphi x . \left(r + \frac{1}{2} r' + x\right) dx;$$

das Moment der Trägheit des Fadens, auf den Mittelpunkt der Bewegung bezogen

$$\mu = \varDelta \int \varphi x \left(r + \frac{1}{2} r' + x\right)^2 dx.$$

Wenn man m, ms, μ für alle übrigen Theile des Pendels zusammengenommen, durch m', $m's'$, μ' bezeichnet, so hat man die Länge des gleichzeitig schwingenden einfachen Pendels, ohne Rücksicht auf den Faden,

$$l = \frac{\mu'}{m's'}$$

[**144**] und mit Rücksicht auf denselben

$$l + \delta l = \frac{\mu' + \varDelta \int \varphi x . (r + \frac{1}{2} r' + x)^2 dx}{m's' + \varDelta \int \varphi x . (r + \frac{1}{2} r' + x)\, dx};$$

woraus der Einfluss des Fadens

$$\delta l = \frac{\varDelta}{m's'} \left\{ \int \varphi x \left(r + \frac{1}{2} r' + x\right)^2 dx - l \int \varphi x \left(r + \frac{1}{2} r' + x\right) dx \right\}$$

und wenn man für $\varDelta$ seinen Ausdruck $\frac{m}{\int \varphi x . dx}$ schreibt,

$$\delta l = \frac{m}{m's'} \left\{ \frac{\int \varphi x (r + \frac{1}{2} r' + x)^2 dx}{\int \varphi x . dx} - l \frac{\int \varphi x (r + \frac{1}{2} r' + x)\, dx}{\int \varphi x . dx} \right\}$$

oder auch

$$\delta l = \frac{m}{m's'} \left\{ \left(r + \frac{1}{2} r' - l\right) \left(r + \frac{1}{2} r'\right) - \left(2r + r' - l\right) \frac{\int \varphi x . x\, dx}{\int \varphi x . dx} + \frac{\int \varphi x . x x\, dx}{\int \varphi x . dx} \right\}$$

hervorgeht; die Integrale werden von $-\frac{1}{2}r'$ bis $+\frac{1}{2}r'$ genommen.

Kehrt man den Faden um, so dass das obere Ende das untere wird, so hat man in diesem Ausdrucke $\varphi(-x)$ für φx zu schreiben, wodurch man in dieser Lage des Fadens erhält:

$$\delta l = \frac{m}{m's'}\left\{\left(r+\frac{1}{2}r'-l\right)\left(r+\frac{1}{2}r'\right)\right.$$
$$\left.+\left(2r+r'-l\right)\frac{\int\varphi x.x\,dx}{\int\varphi x.dx}+\frac{\int\varphi x.xx\,dx}{\int\varphi x.dx}\right\}.$$

Hieraus geht hervor, dass der Einfluss der Ungleichheiten des Fadens in beiden Lagen nahe gleich ist, indem das Glied welches in beiden Ausdrücken ein verschiedenes Zeichen hat, wegen der Multiplication mit $2r+r'-l$, eine geringe Wirkung erlangt, denn dieser Factor ist klein, immer wenn der Faden nahe bei dem Mittelpunkte der Bewegung anfängt, und sich nahe bei dem Mittelpunkte der Schwingung endigt. Die halbe Summe beider Ausdrücke ist der Einfluss auf das Mittel aus zwei Versuchen, zwischen welchen der Faden umgekehrt worden ist:

$$= \frac{m}{m's'}\left\{\left(r+\frac{1}{2}r'-l\right)\left(r+\frac{1}{2}r'\right)+\frac{\int\varphi x.xx\,dx}{\int\varphi x.dx}\right\}.$$

Setzt man nun

$$\varphi x = h\left\{1+\alpha\frac{x}{r'}+\beta\frac{xx}{r'r'}+\text{u. s. w.}\right\}$$

wo h den Querschnitt in der Mitte des Fadens bedeutet, so verschwinden aus beiden Integralen die ungeraden Glieder und man erhält: [**145**]

$$\int\varphi x.xx\,dx = hr'^3\left\{\frac{1}{3.2^2}+\frac{\beta}{5.2^4}+\frac{\delta}{7.2^6}+\text{u. s. w.}\ldots\right\}$$
$$\int\varphi x.dx = hr'\left\{1+\frac{\beta}{3.2^2}+\frac{\delta}{5.2^4}+\text{u. s. w.}\ldots\right\}$$

woraus also, wenn man die Potenzen und Producte von β, δ,... vernachlässigt, der gesuchte Einfluss des Fadens

$$= \frac{m}{m's'}\left\{\frac{1}{3}r'r' - \frac{1}{2}r'(l-2r) - r(l-r) + r'r'\left(\frac{\beta}{180} + \frac{\delta}{840} + \frac{\zeta}{4032} + \text{u. s. w.}\right)\right\}$$

folgt.

Die Reduction der Länge des einfachen Pendels auf das zusammengesetzte ist daher

$$-\frac{m}{m's'}\left\{\frac{1}{3}r'r' - \frac{1}{2}r'(l-2r) - r(l-r)\right\}\left\{1 + \frac{r'r'\left(\frac{\beta}{180} + \frac{\delta}{840} + \frac{\zeta}{4032} + \text{u. s. w.}\right)}{\frac{1}{3}r'r' - \frac{1}{2}r'(l-2r) - r(l-r)}\right\}$$

und sie ist bei den Versuchen ohne Rücksicht auf die Ungleichheiten in Rechnung gebracht.

Man hat für beide Pendel des Apparats, in der ersten Reihe der Versuche:

Angewandte Reduction wegen des Fadens	$+\,0{,}^{l}2126$;	$+\,0{,}^{l}0244$
Länge des Fadens	$r' = 1280{,}33$;	$416{,}34$
Länge des gleichzeitigen einfachen Pendels	$l = 1305{,}27$;	$441{,}56$
Anfang des Fadens unter dem Aufhängepunkt	$r = 14{,}52$;	$14{,}52$

Hieraus folgt die vollständige Reduction für beide Pendel:

$$\text{das lange} = +\,0{,}^{l}2126 - 0{,}^{l}00669\,.\,\beta - 0{,}^{l}001434\,.\,\delta - 0{,}^{l}000299\,.\,\zeta - \text{u. s. w.}$$

$$\text{das kurze} = +\,0{,}^{l}0244 - 0{,}^{l}00068\,.\,\beta - 0{,}^{l}000147\,.\,\delta - 0{,}^{l}000031\,.\,\zeta - \text{u. s. w.}$$

Um eine Schätzung der möglichen Grösse der Coefficienten β, δ, ζ... zu erhalten, habe ich den Durchmesser des langen Fadens, mit einem der *Pistor*schen, zur Prüfung der Theilungen des Meridiankreises bestimmten Mikroskope, an vielen verschiedenen Stellen gemessen, und ihn im Mittel $= 0{,}^{l}0861$ gefunden. Die grösste Abweichung von diesem Mittel war $0{,}^{l}0013$, und ich habe keinen Grund, die Messungen selbst, welche eine doppelte Einstellung des Mikroskops auf beide Ränder des Fadens er-

fordern, für sicherer zu halten. Nimmt man aber diesen Unterschied für eine wirkliche Ungleichheit [**146**] des Fadens, die Ungleichheit der Querschnitte doppelt so gross $= \frac{1}{33}$ des Ganzen, und verlegt man sie auf beide Enden des Fadens, wo sie den grössten Einfluss erhält, so ist

$$\frac{1}{33} = \frac{\beta}{4} + \frac{\delta}{16} + \frac{\zeta}{64} + \cdots$$

Jenachdem die Ungleichheit dem von β, oder δ, oder $\zeta \ldots$ abhängigen Gliede zugeschrieben wird, erhält man die Verbesserung der Reduction, für das

lange Pendel — $0^{L}{,}00081$; — $0^{L}{,}00070$; — $0^{L}{,}00058$
kurze —— — $0^{L}{,}00008$; — $0^{L}{,}00007$; — $0^{L}{,}00006$

Im ungünstigsten Falle erhielte also, selbst diese unwahrscheinliche Annahme der Ungleichheit des Fadens, auf die Länge des Secundenpendels, nur einen Einfluss von $0^{L}{,}0004$. In der Wirklichkeit ist derselbe aber ohne Zweifel kleiner. Man kann ihn also als unmerklich betrachten; auch würde das Resultat ähnlicher Versuche nicht merklich an Sicherheit gewinnen, wenn man die Fäden oft mit neuen vertauschte.

Beilage IX.

Einfluss der cylindrischen Figur der Schneide, worauf ein Pendel sich bewegt, auf die Schwingungszeit.

1.

Ich nehme an, dass die Schneide, durch eine Cylinderfläche begrenzt wird, deren Gleichung zwischen rechtwinklichten Coordinaten ξ und η ich durch $V = 0$ bezeichne. Der Mittelpunkt dieser Coordinaten ist der Berührungspunkt der Schneide und der Ebene worauf sie liegt, im Zustande der Ruhe des Pendels; in diesem Zustande ist die Axe der ξ lothrecht, die der η wagrecht; die ξ sind unterhalb dem Mittelpunkte der Coordinaten positiv, die η rechts von der Lothlinie.

Wenn das Pendel den Winkel u mit der Lothlinie macht, so berührt ein Punkt der cylindrischen Schneide die Ebene, dessen Coordinaten ich durch ξ' und η' bezeichne. Die auf ein zweites,

im Raume festes Axensystem, mit welchem das erste zusammenfällt, wenn das Pendel in Ruhe ist, [147] bezogenen Coordinaten eines Massentheilchens dm des Pendels, werde ich x und y nennen; x wird unter der Ebene positiv genommen, y und u links von der Lothlinie. Die auf dieses zweite Axensystem bezogenen Coordinaten des Mittelpunkts des ersteren, werden durch x' und y' bezeichnet. Man hat also

$$x = x' + \xi \cos u + \eta \sin u$$
$$y = y' + \xi \sin u - \eta \cos u.$$

Die Differentialgleichung der Bewegung des Pendels ist

$$c = \int \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}\, dm - 2\pi^2 \lambda \int x\, dm$$

wo λ die Länge des einfachen Secundenpendels bezeichnet; indem die Axe der ξ durch den Schwerpunkt geht, ist

$$\int \xi\, dm = ms$$
$$\int \eta\, dm = 0$$
$$\int (\xi\xi + \eta\eta) dm = m(\mu + ss)$$

wo m die Masse des Pendels, s die Coordinate ξ des Schwerpunkts und $m\mu$ das Moment der Trägheit, bezogen auf eine der Drehungsaxe parallel, durch den Schwerpunkt gelegte Axe bedeuten. Hierdurch verwandelt die Differentialgleichung sich in:

$$c = (\mu + ss)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2s\frac{du}{dt}\left(\frac{dy'}{dt}\cos u - \frac{dx'}{dt}\sin u\right)$$
$$+ \frac{dx'^2 + dy'^2}{dt^2} - 2\pi^2\lambda\{s\cos u - x'\}. \quad \ldots\ldots(1)$$

2.

Die Coordinaten x' und y' hängen von den Coordinaten ξ' und η' des Berührungspunkts des Cylinders und der Ebene ab; es ist nämlich, wenn σ den Bogen auf der Oberfläche des Cylinders, zwischen dem Berührungspunkte und dem Anfangspunkte der Coordinaten bedeutet,

$$x' = -\xi'\cos u - \eta'\sin u$$
$$y' = -\xi'\sin u + \eta'\cos u - \sigma.$$

Indem die Normale an den Berührungspunkt die Axe der ξ im Winkel u durchschneidet, hat man

$$d\xi' = -d\sigma \sin u; \quad d\eta' = d\sigma . \cos u$$

[148] und wenn dieses in das Differential der Gleichung $V=0$ gesetzt wird,

$$0 = \left(\frac{dV}{d\xi'}\right) \sin u - \left(\frac{dV}{d\eta'}\right) \cos u \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

wodurch, mit $V=0$ verbunden, ξ' und η' durch u bestimmt werden.

Drückt man x' und y' in (1) durch ξ' und η' aus, und lässt man das dx'^2 und dy'^2 enthaltende Glied weg, indem es von der Ordnung des Quadrats der Abstumpfung der Schneide ist, welche Ordnung ich allenthalben vernachlässigen werde, so verwandelt sich (1) in

$$c = \left(\mu + ss - 2s\xi'\right)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2\pi^2\lambda\left((s-\xi')\cos u - \eta' \sin u\right)$$

Diese Differentialgleichung ist unter der allgemeinen Form begriffen, deren Integral ich in der I. Beilage gegeben habe; es ist nämlich hier

$$nn = \frac{\pi^2 \lambda s}{\mu + ss}$$

$$fu = -\frac{\xi'}{s}\cos u - \frac{\eta'}{s}\sin u$$

$$f'u = -\frac{s}{\mu + ss} . \xi'.$$

Da ξ' und η' für $u=0$ verschwinden, so ist $f0 = 0$; ferner ist

$$\frac{d\frac{fu}{\sin u}}{du} = \frac{\xi'}{s . \sin u^2} - \frac{d\xi' . \cos u + d\eta' . \sin u}{s . \sin u . du} = \frac{\xi'}{s \sin u^2}.$$

Der Ausdruck der Schwingungszeit (Beilage I. 3) verwandelt sich daher in

$$\frac{\pi}{n}\left\{Fu'' - \frac{fu' + f(-u')}{2\sin u'} . \frac{dFu'}{du'}\right\}$$

$$+ \frac{1}{ns}\int \frac{\xi'\left(1 - \frac{s}{l}\sin u^2\right) du}{\sin u^2 \sqrt{(2\cos u - 2\cos u')}}$$

wo $l.s$ für $\mu + ss$ geschrieben ist, also l die Länge des einfachen Pendels bedeutet, welches mit dem untersuchten Pendel gleichzeitig schwingen würde, wenn dieses sich um den Anfangspunkt der Coordinaten drehte. Bezeichnet man aber die der Schwingungszeit um die cylindrische Schneide entsprechende einfache Pendellänge durch l', so hat man die wirkliche Schwingungszeit $= \sqrt{\frac{l'}{\lambda}} \cdot Fu''$, und wenn man sie ihrem eben gegebenen Ausdruck gleich setzt:

$$l' = l - l \cdot \frac{fu' + f(-u')}{\sin u'} \cdot \frac{dFu'}{Fu'.du'}$$

$$+ \frac{2l}{sFu'} \cdot \frac{1}{\pi} \int \frac{\xi'\left(1 - \frac{s}{l}\sin u^2\right) du}{\sin u^2 \sqrt{(2\cos u - 2\cos u')}} \cdots \cdots (3)$$

[149] 3.

Ich werde jetzt annehmen, dass die Schneide durch einen, nach einem Kegelschnitte gekrümmten Cylinder abgestumpft ist, dessen eine Axe mit der Axe der ξ zusammenfällt und dessen Oberfläche von den abgeschliffenen Ebenen des Prismas berührt wird. Den Winkel dieser Ebenen bezeichne ich durch $2i$, die Sehne des Cylinders da wo die Ebenen ihn berühren, oder die Breite der Abstumpfung, durch b. Wenn a und p die halbe, in der Richtung der ξ liegende Axe und den halben Parameter des Kegelschnitts bedeuten, so hat man daher;

$$0 = V = 2p\xi' \pm \frac{p}{a}\xi'\xi' + \eta'\eta'$$

wo das obere Zeichen für eine Ellipse, das untere für eine Hyperbel gilt; ferner durch Differentiation (2)

$$0 = p\left(1 \pm \frac{\xi'}{a}\right)\sin u - \eta'\cos u$$

und aus beiden Gleichungen zusammengenommen, wenn ε für $1 \mp \frac{p}{a}$ geschrieben wird,

$$\xi' = \mp a \left\{1 - \frac{\cos u}{\sqrt{(1 - \varepsilon \sin u^2)}}\right\}$$

$$\eta' = \pm a \cdot \frac{(1 - \varepsilon) \sin u}{\sqrt{(1 - \varepsilon \sin u^2)}}.$$

Setzt man $90^0 - i$ für u, so verwandelt sich η' in $\frac{1}{2} b$, wodurch man

$$a = \pm \frac{b\sqrt{(1 - \varepsilon \cos i^2)}}{2(1 - \varepsilon) \cos i}$$

als auch

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \frac{b\sqrt{(1 - \varepsilon \cos i^2)}}{2(1 - \varepsilon) \cos i} \left\{\frac{\cos u}{\sqrt{(1 - \varepsilon \sin u^2)}} - 1\right\} \\ fu &= \frac{b\sqrt{(1 - \varepsilon \cos i^2)}}{2s.(1 - \varepsilon) \cos i} \left\{\cos u - \sqrt{(1 - \varepsilon \sin u^2)}\right\} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (4)$$

erhält.

Wenn die Begrenzungscurve eine Ellipse ist, deren kleine Axe mit der der ξ zusammenfällt, so ist ε zwischen $-\infty$ und 0; für $\varepsilon = 0$ ist die Curve ein Kreis; zwischen 0 und ε eine Ellipse mit der grossen Axe in der Richtung der ξ; für 1 eine Parabel; zwischen 1 und $\sec i^2$ eine Hyperbel. Die äusserste Ellipse ist eine gerade Linie senkrecht auf die Axe der ξ, die äusserste Hyperbel fällt mit den Ebenen des Prismas ganz zusammen und hat deren Winkel zum Scheitel, in welchem Falle b nothwendig willkürlich bleibt.

[150] 4.

Für den in Grössen der ersten Ordnung vollständigen Ausdruck (3) der Schwingungszeit, werde ich

$$l' = l - \frac{l}{s} \cdot b \cdot q$$

schreiben, wo q aus den beiden Theilen $q' + q''$:

$$q' = \frac{\sqrt{(1 - \varepsilon \cos i^2)}}{(1 - \varepsilon) \cos i} \cdot \left\{\frac{\cos u' - \sqrt{(1 - \varepsilon \sin u'^2)}}{\sin u'}\right\} \frac{dFu'}{Fu'.du'}$$

$$q'' = \frac{\sqrt{(1-\varepsilon\cos i^2)}}{(1-\varepsilon)\cos i\, Fu'}\cdot\frac{1}{\pi}\times$$

$$\int\frac{\left(\sqrt{(1-\varepsilon\sin u^2)}-\cos u\right)\left(1-\frac{s}{l}\sin u^2\right)}{\sin u^2\sqrt{(1-\varepsilon\sin u^2)}\sqrt{(2\cos u-2\cos u')}}du\begin{bmatrix}\text{von} - u'\\ \text{bis} + u'\end{bmatrix}$$

besteht. Führt man den Winkel x ein, so dass

$$\sin u = -\sin u'.\cos x$$

ist, so verwandelt der letzte Ausdruck sich in:

$$q'' = \frac{\sqrt{(1-\varepsilon\cos i^2)}}{(1-\varepsilon)\cos i\, Fu'}\cdot\frac{1}{\sin u'^2.\pi}\times$$

$$\int\left\{\frac{1}{\sqrt{(1-\sin u'^2\cos x^2)}}-\frac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon\sin u'^2\cos x^2)}}\right\}\left(1-\frac{s}{l}\sin u'^2\cos x^2\right)$$

$$\times\sqrt{\left\{\frac{\sqrt{(1-\sin u'^2\cos x^2)}+\cos u'}{2}\right\}}\frac{dx}{\cos x^2}$$

wo das Integral von $x=0$ bis π genommen wird.

Entwickelt man nach den Potenzen von $\sin u'$, welches so lange angeht, so lange $\varepsilon\sin u'^2$ eine kleine Grösse ist, so erhält man

$$q' = \frac{\sqrt{(1-\varepsilon\cos i^2)}}{\cos i}\left\{-\frac{1}{8}\sin u'^2-\left(\frac{15}{256}+\frac{1}{32}\varepsilon\right)\sin u'^4\right.$$
$$\left.-\text{u. s. w.}\dots\right\}$$

$$q'' = \frac{\sqrt{(1-\varepsilon\cos i^2)}}{\cos i}\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{16}+\frac{3}{16}\varepsilon-\frac{1}{4}\frac{s}{l}\right)\sin u'^2\right.$$
$$+\left(\frac{39}{2048}+\frac{33}{512}\varepsilon+\frac{15}{128}\varepsilon^2-\frac{13}{128}\frac{s}{l}-\frac{9}{64}\frac{s}{l}\varepsilon\right)\sin u'^4$$
$$\left.+\text{u. s. w.}\right\}$$

woraus hervorgeht

$$q = \frac{\sqrt{(1-\varepsilon\cos i^2)}}{2\cos i}\left\{1-\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{8}\varepsilon+\frac{1}{2}\frac{s}{l}\right)\sin u'^2\right.$$
$$-\left(\frac{81}{1024}-\frac{17}{256}\varepsilon-\frac{15}{64}\varepsilon^2+\frac{13}{64}\frac{s}{l}+\frac{9}{32}\frac{s}{l}\cdot\varepsilon\right)\sin u'^4$$
$$\left.+\text{u. s. w.}\right\}\dots\dots\dots\dots\dots\dots(5)$$

Allein dieser Ausdruck hört auf brauchbar zu sein, wenn ε sehr gross wird. Lässt man daher $\sqrt{(1-\varepsilon\sin u'^2\cos x^2)}$ unentwickelt, und bezeichnet man es, mit Herrn *Legendre*, durch Δ, so erhält man, unter Vernachlässigung der in $\sin u'^2$ multiplicirten, ε nicht enthaltenden Glieder,

[151] $q'=0$

$$q''=\frac{\sqrt{(1-\varepsilon\cos i^2)}}{(1-\varepsilon)\cos i.\pi}\int\left\{\left(-\frac{1}{\sin u'^2}+\frac{1}{8}\right)\left(\frac{dx}{\Delta\cos x^2}-\frac{dx}{\cos x^2}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{s}{l}+\frac{1}{8}\right)\frac{dx}{\Delta}-\left(\frac{s}{l}-\frac{3}{8}\right)dx\right\}$$

und wenn man von 0 bis π integrirt,

$$q''=\frac{\sqrt{(1-\varepsilon\cos i^2)}}{(1-\varepsilon)\cos i}\left\{\left(-\frac{1}{\sin u'^2}+\frac{1}{8}\right)\frac{1}{\pi}\int\frac{dx}{\Delta\cos x^2}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{s}{l}+\frac{1}{8}\right)\int\frac{dx}{\Delta}-\frac{s}{l}+\frac{3}{8}\right\}.$$

Dieses Integral kann bekanntlich von dem Nenner $\cos x^2$ befreit werden, wenn man Δ tang x differentiirt; man erhält dadurch

$$d.(\Delta\tang x)=\frac{dx}{\Delta\cos x^2}-\varepsilon\sin u'^2.\frac{\cos x^2\,dx}{\Delta}$$

also, da Δ tang x für $x=0$ und $x=\pi$ verschwindet,

$$\int\frac{dx}{\Delta\cos x^2}=\varepsilon\sin u'^2\int\frac{\cos x^2.dx}{\Delta}.$$

Hierdurch verwandelt sich der Ausdruck von q in

$$\frac{\sqrt{(1-\varepsilon\cos i^2)}}{(1-\varepsilon)\cos i}\left\{\int\frac{(\frac{1}{8}-\varepsilon\cos x^2)\,dx}{\pi\Delta}\right.$$
$$\left.+\frac{3}{8}+\frac{s}{l}\int\frac{dx}{\pi\Delta}-\frac{s}{l}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

5.

Die Form, welche *Gauss* der Berechnung der hier vorkommenden elliptischen Transcendenten gegeben hat, ist bekanntlich,

$$\int\frac{dx}{\pi\sqrt{(mm\cos x^2+nn\sin x^2)}}=\frac{1}{\mu}$$
$$\int\frac{dx\,(\cos x^2-\sin x^2)}{\pi\sqrt{(mm\cos x^2+nn\sin x^2)}}=-\frac{\nu}{\mu}$$

wobei μ die Grenze ist, welcher die Quantitäten

$$\begin{aligned} m' &= \tfrac{1}{2}(m+n) \\ n' &= \sqrt{(mn)} \\ m'' &= \tfrac{1}{2}(m'+n') \\ n'' &= \sqrt{(m'n')} \end{aligned}$$

u. s. w.

sich näheren, und

$$\nu = \frac{2\lambda'\lambda' + 4\lambda''\lambda'' + 8\lambda'''\lambda''' + \text{u. s. w.}}{\lambda\lambda}$$

[152] wo $16\lambda\lambda = mm - nn$; $m'\lambda' = \lambda\lambda$; $m''\lambda'' = \lambda'\lambda'$, u. s. w. Wendet man dieses hier an, so hat man

$$m = \sqrt{(1 - \varepsilon \sin u'^2)},\ n = 1,$$

und man erhält

$$q = \frac{\sqrt{(1-\varepsilon\cos i^2)}}{2\cos i}\left\{\frac{1-\nu}{\mu} + \frac{\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)+\frac{\nu}{\mu}}{1-\varepsilon} - \frac{2s}{l}\cdot\frac{1-\frac{1}{\mu}}{1-\varepsilon}\right\}. \quad (7)$$

Für den Fall dass $\varepsilon = -\infty$, oder dass die Schneide durch eine auf die Axe der ξ senkrechte Ebene abgestumpft ist, ist diese Formel nicht unmittelbar anwendbar. Man formt aber den Ausdruck (6) leicht in folgenden um ($\sqrt{(1-\varepsilon\sin u'^2)} = \Delta$; $\varepsilon\sin u'^2 = \Delta'\Delta'.\varepsilon'$)

$$q = \frac{\sqrt{(1-\varepsilon\cos i^2)}}{(1-\varepsilon)\cos i}\left\{\frac{\left(-\frac{1}{\sin u'^2}+\frac{1}{8}+\frac{s}{l}\right)}{\Delta'}\int\frac{dx}{\pi\sqrt{(1+\varepsilon'\sin x^2)}} + \frac{\Delta'}{\sin u'^2}\int\frac{dx\sqrt{(1+\varepsilon'\sin x^2)}}{\pi} + \frac{3}{8} - \frac{s}{l}\right\}$$

unter welcher Form, aus der von Herrn *Legendre* (Exercices du Calc. Int. I. P. 68) gegebenen Reihenentwickelung der beiden Integrale, unmittelbar sichtbar wird, dass für $\varepsilon = -\infty$ nur das zweite Glied in der Rechnung bleibt, und sich in

$$\frac{\sqrt{(1-\varepsilon\sin u'^2)}}{\sin u'^2}\cdot\frac{2}{\pi}$$

verwandelt. Man hat also für diesen Fall

$$q = \frac{2}{\pi \sin u'} \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

und dieses ist das Maximum des Einflusses, welchen die Abstumpfung der Schneide erlangen kann.

Beilage X.

Einfluss der Unterlage auf die Bewegung eines um eine Schneide schwingenden festen Körpers.

1.

Wenn das mit der Schneide auf horizontalen Unterlagen liegende Pendel in Ruhe ist, so ist ein Punkt in der durch die Schneide gelegten lothrechten Ebene, von welchem ich annehme, dass er, auch während der Bewegung, in dieser Ebene bleibt; seine Entfernung von der Schneide bezeichne [**153**] ich durch h. Die Schneide aber bewegt sich auf ihren Unterlagen und ist $h \sin u$ von ihrem ursprünglichen Orte entfernt, wenn das Pendel den Winkel u mit der Lothlinie macht; dabei erfährt sie die Entgegenwirkung einer Kraft, welche ich durch $m\,Q$ bezeichne, wo m die Masse des Pendels ist.

Unter Anwendung der Bezeichnungen im 1. Artikel der IX. Beilage ist die Differentialgleichung der Bewegung:

$$c = \int dm \cdot \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} - 2\pi^2 \lambda \int x\, dm + 2\pi^2 \lambda m h \int Q \cos u\, du.$$

Wenn man x und y durch die im Pendel festen Coordinaten ξ und η ausdrückt, nämlich

$$x = \xi \cos u + \eta \sin u$$
$$y = \xi \sin u - \eta \cos u + h \sin u$$

und die Integrationen in Beziehung auf die Masse ausführt, so erhält man hieraus

$$c = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \left\{\mu + (s+h)^2 - (2sh + hh) \sin u^2\right\}$$
$$- 2\pi^2 \lambda \left\{s \cos u - h \int Q \cos u\, du\right\} \ldots\ldots\ldots (1)$$

2.

Die Zeit einer ganzen Schwingung des Pendels findet sich hieraus nach der 3. Formel der I. Beilage, nachdem für Q sein Ausdruck gesetzt ist. Diesen werde ich

$$= a^{(0)} + a^{(1)} h \sin u + a^{(2)} h^2 \sin u^2 + a^{(3)} h^3 \sin u^3 + \text{u. s. w.}$$

annehmen, woraus die am angeführten Orte durch fu bezeichnete Grösse

$$fu = -\frac{h}{s}\left\{a^{(0)} \sin u + \frac{1}{2} a^{(1)} h \sin u^2 + \frac{1}{3} a^{(2)} h^2 \sin u^3 + \text{u. s. w.} \ldots\right\}$$

folgt; man hat ferner, wenn man h^2, wo es nicht in einen der Coefficienten a multiplicirt ist, vernachlässigt,

$$f'u = \frac{sh}{\mu + ss} \cos u^2;$$

endlich ist

$$nn = \frac{\pi^2 \lambda s}{\mu + ss}.$$

Hieraus folgt $f0 = 0$, und die angeführte Formel verwandelt sich in

$$\frac{\pi}{n}\left\{Fu'' - \frac{dFu''}{du''} \, \frac{fu' + f(-u')}{2 \sin u'}\right\}$$
$$+ \frac{1}{n} \int \frac{f'u.du + d\dfrac{fu}{\sin u}}{\sqrt{(2\cos u - 2\cos u')}}.$$

[154] Die Länge des gleichzeitig schwingenden einfachen Pendels $= l'$ gesetzt, erhält man diese Schwingungszeit

$$= \sqrt{\frac{l'}{\lambda}} \cdot Fu'',$$

also wenn man beide Ausdrücke derselben gleich setzt und sl für $\mu + ss$ schreibt, wo l die, dem ohne Störung durch die Unterlage schwingenden Pendel, entsprechende einfache Pendellänge bezeichnet,

$$l' = l - \frac{l\,d\,Fu''}{Fu''.du''} \cdot \frac{fu' + f(-u')}{\sin u'}$$

$$+ \frac{2l}{Fu''} \cdot \int \frac{f'u.du + d\frac{fu}{\sin u}}{\pi\sqrt{(2\cos u - 2\cos u')}} .$$

Vernachlässigt man in diesem Ausdrucke die Glieder der Störung welche in das Quadrat und die höheren Potenzen des Schwingungswinkels multiplicirt sind, so verschwindet sein zweites Glied aus der Rechnung, und das dritte wird, nach der Substitution der Ausdrücke von fu und $f'u$:

$$2h\int \frac{\cos u^2.du}{\pi\sqrt{(2\cos u - 2\cos u')}}$$

$$-\frac{2lh}{s}\int \frac{(\frac{1}{2}a^{(1)}h + \frac{2}{3}a^{(2)}h^2\sin u + \frac{3}{4}a^{(3)}h^3\sin u^2 + \text{etc.})\cos u\,du}{\pi\sqrt{(2\cos u - 2\cos u')}},$$

wovon das bis zu der angegebenen Grenze richtige Integral

$$= 2h - 2h\frac{l}{s}\left\{\frac{1}{2}a^{(1)}h + \frac{1.3}{2.4}a^{(3)}h^3\sin u'^2\right.$$

$$\left. + \frac{1.3.5}{2.4.6}a^{(5)}h^5\sin u'^4 + \text{u. s. w.}\right\}$$

ist. Man erhält also

$$l' = l + 2h - 2h\frac{l}{s}\left\{\frac{1}{2}a^{(1)}h + \frac{1.3}{2.4}a^{(3)}h^3\sin u'^2\right.$$

$$\left. + \frac{1.3.5}{2.4.6}a^{(5)}h^5\sin u'^4 + \text{u. s. w.}\right\} \ldots\ldots\ldots (2)$$

3.

Die Abnahme des Schwingungswinkels während einer Schwingung, ist, nach der 2. Formel in der I. Beilage

$$= \frac{f(-u') - fu'}{\sin u'},$$

also wenn man den Ausdruck von $f(-u')$ und fu' setzt,

$$= \frac{2h}{s}\left\{a^{(0)} + \frac{1}{3}a^{(2)}h^2\sin u'^2 + \frac{1}{5}a^{(4)}h^4\sin u'^4 + \text{u. s. w.}\right\} \ldots (3)$$

Anmerkungen.

Von den Untersuchungen *Bessel's* über das Secundenpendel ist vorstehend die Grund legende Arbeit aus den Abhandlungen der Berliner Akademie vom Jahre 1826 zum Abdruck gebracht, jedoch mit Fortlassung des letzten Theiles, welcher lediglich die numerischen Belege über die einzelnen Versuche enthält, und für das Verständniss der Arbeit selbst nicht erforderlich ist. Die bleibende Bedeutung der Abhandlung liegt weniger in der genauen Bestimmung der Pendellänge für Königsberg, auch nicht in der scharfsinnigen Anordnung der Einzelheiten der Untersuchung, als vielmehr in der ganzen, übrigens für alle Arbeiten *Bessel's* charakteristischen Art und Weise, die Aufgabe anzugreifen und ihre Lösung durchzuführen. Was dem Leser immer von Neuem Bewunderung abnöthigt, ist die Vereinigung von Urtheil in dem Herausfinden des Wesentlichen, von Scharfsinn in der Entdeckung der Hülfsmittel zur Ueberwindung der auftretenden Schwierigkeiten, von Ausdauer in der Durchführung der Beobachtungen und von selbstloser Kritik in der Abschätzung des wahren Werthes der Resultate. Was *Bessel* an concreten, für die Folgezeit vorbildlich gewordenen Methoden und Regeln geschaffen hat, ist heute so sehr Gemeingut geworden, dass wir uns nur sehr schwer den Abstand vergegenwärtigen können, welcher *Bessel's* Arbeiten von zahlreichen anderen seiner Zeitgenossen trennt. Eine kleine Probe davon giebt das in Beilage V. abgedruckte Certificat über die Länge der für *Bessel* bestimmten Toise mit seinem geradezu naiven »Il nous a semblé que . . .«.

Der *Bessel'sche* Apparat ist später, ausser von *Bessel* selbst, noch mehrmals zu Bestimmungen verwendet worden, hat jedoch keine allgemeine Nachfolge gefunden*). Der Grund hiervon

*) Eine Zusammenstellung der Pendel-Literatur findet sich in der von der Internationalen Erdmessung veröffentlichten Arbeit: Geodätische Literatur auf Wunsch der Permanenten Commission im Centralbureau zusammengestellt von Professor Dr. O. Boersch. 4⁰. 1889, Berlin, G. Reimer.

liegt nicht in der geringeren Handlichkeit der Einrichtung, sondern in einem Umstande, dessen Aufdeckung als ein Hauptergebniss der vorliegenden Arbeit anzusehen ist. Bis auf *Bessel* war bei der Reduction der Pendellänge auf den leeren Raum nur die durch den Auftrieb der Luft bewirkte scheinbare Verminderung der Schwere in Rechnung gezogen worden, obgleich eine einfache experimentelle Prüfung genügt hätte, das Unzureichende dieser Reduction nachzuweisen und zu zeigen, dass der Einfluss der mitschwingenden Luft durchaus merklich ist. Es ist überaus interessant zu sehen, wie *Bessel* die Schwierigkeit, welche die Berücksichtigung der mitschwingenden Luft auf den ersten Anblick darbietet, bewältigt und die Lösung der Aufgabe auf die Ermittelung einer einzigen von der Form des Pendels abhängenden Hülfsgrösse reducirt, deren praktische Bestimmung sich unschwer aus der Benutzung zweier Pendel von gleicher äusserer Gestalt, aber von verschiedener Masse ergiebt. Leicht ist *Bessel* die Lösung des Räthsels allerdings nicht geworden, obgleich die Arbeit keine Spuren davon zeigt. Wir sind jedoch aus den gedruckt vorliegenden Briefen *Bessel*'s an *Gauss* und namentlich an *Olbers* in jener Zeit sehr genau darüber unterrichtet, dass er die Aufklärung des Widerspruches zwischen seiner und den älteren Bestimmungen zunächst in einer ganz anderen Richtung suchte und dass daraus die zahlreichen und mühsamen, übrigens keineswegs vergeblichen Versuche über die Pendelschneiden und ihre Unterlagen entsprungen sind. Als Gesammtergebniss dieser Untersuchungen schlägt dann *Bessel* selber gewissermassen als Pendel der Zukunft das von *Bohnenberger* angegebene Reversionspendel vor, jedoch mit der wesentlichen Abänderung, dass erstlich die äussere Gestalt eine durchaus symmetrische sei, und dass zweitens für absolute Bestimmungen die Schneiden mit einander vertauscht werden können. Dieser in dem Schlussparagraphen des Textes begründete Vorschlag, auf welchen *Bessel* später (Astr. Nachr. XXX No. 697) noch einmal unter Darlegung specieller Angaben über die Construction zurückgekommen ist, hat denn auch bei den zahlreichen für Gradmessungszwecke unternommenen Pendelbeobachtungen allgemeine Annahme gefunden. Allerdings hat man auch hierbei Lehrgeld zahlen müssen. So hat das (bei *Bessel*'s Apparat völlig unmerkliche) Mitschwingen des Pendelträgers erst eine Reihe von Bestimmungen merklich verfälschen können, bevor man dahin gelangte, diese Fehlerquelle unschädlich zu machen, ebenso ist die Schwierigkeit den Schneidenabstand, d. h.

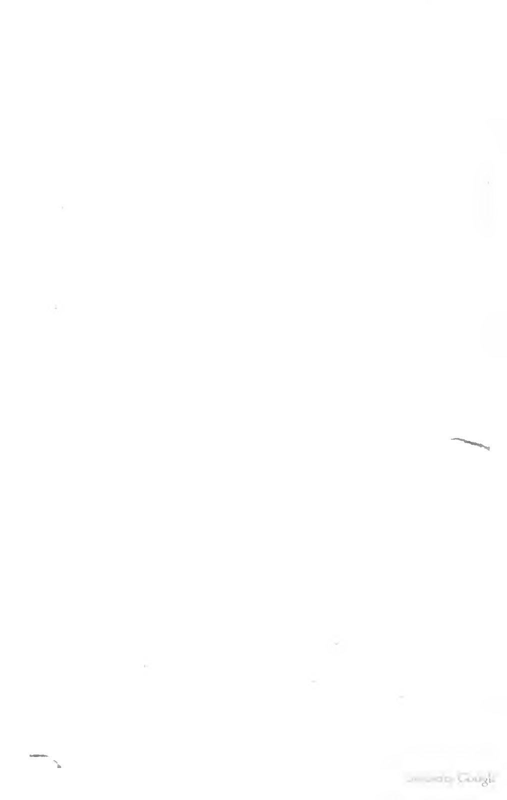
ein Endmaass, auf Strichmaass zu reduciren, bestehen geblieben, so dass als augenblicklich letztes Wort in dieser Frage wiederum der *Bessel*'sche Gedanke hervortritt, bei absoluten Bestimmungen die Länge des einfachen Secundenpendels aus dem Längenunterschiede zweier Pendel von verschiedener Länge zu ermitteln (vgl. den Bericht von Capt. *Defforges* in den Verhandlungen der Conferenz der Permanenten Commission zu Nizza im Jahre 1887). Noch ein anderer Umstand, den man bisher bei Seite gelassen hat, ist bereits von *Bessel* hervorgehoben worden. Nach unserer heutigen Ausdrucksweise ist ein Pendel ein Leiter, der in einem magnetischen Felde schwingt. Dass die dabei auftretende Induction die Pendelbewegung beeinflusst, ist theoretisch gewiss — es wäre wohl der Mühe werth, die bisher stillschweigend gemachte Annahme von der Unmerklichkeit dieser Wirkung rechnend oder experimentell direct zu prüfen.

Leipzig, den 30. September 1889.

H. Bruns.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.







Der Preis für den Druckbogen à 16 Seiten ohne etwaige textliche Abbildungen ist auf *M* —.20 festgesetzt worden.

Erschienen sind:

Nr. 1. **H. Helmholtz,** Erhaltung der Kraft. (1847.) (60 pag.) 80 *Pf*.

» 2. **Carl Fr. Gauss,** Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte. (1840.) Herausgegeben von A. Wangerin, o. Prof. d. Mathematik, (60 pag.) 80 *Pf*.

» 3. **J. Dalton** und **W. H. Wollaston,** Die Grundlagen der Atomtheorie. Abhandlungen. (1803—1808.) Herausgegeben von W. Ostwald. Mit 1 Tafel. (30 pag.) 50 *Pf*.

» 4. **Gay-Lussac,** Untersuchungen über das Jod. (1814.) Herausgegeben von W. Ostwald. (52 pag.) 80 *Pf*.

» 5. **Carl Fr. Gauss,** Allgemeine Flächentheorie. (Disquisitiones generales circa superficies curvas.) (1827.) Deutsch herausgegeben von A. Wangerin. (62 pag.) 80 *Pf*.

» 6. **E. H. Weber,** Über die Anwendung der Wellenlehre auf die Lehre vom Kreislaufe des Blutes und insbesondere auf die Pulslehre. (1850.) Herausgegeben von M. v. Frey. Mit 1 Tafel. (46 pag.) 1 *M*.

» 7. **F. W. Bessel,** Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels. (1826.) Herausgegeben von H. Bruns. Mit 2 (Doppel-)Tafeln. (171 pag.) 3 *M*.

» 8. I. **A. Avogadro,** Versuch einer Methode, die Massen der Elementarmolekeln der Stoffe und die Verhältnisse, nach welchen sie in Verbindungen eintreten, zu bestimmen. (1811.) — II. Brief des Herrn **Ampère** an den Herrn Grafen Berthollet, über die Bestimmung der Verhältnisse, in welcher sich die Stoffe nach der Zahl und der wechselseitigen Anordnung der Molekeln, aus denen ihre integrirenden Partikeln zusammengesetzt sind, verbinden. Mit 3 lithogr. Tafeln. (1814.) Herausgegeben von W. Ostwald. (50 pag.) *M* 1.20.

In Vorbereitung befinden sich:

» 9. **H. Hess,** Thermochemische Untersuchungen. Herausgegeben von W. Ostwald.

» 10. **Franz Neumann,** Die mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme. Herausgegeben von C. Neumann.

» 11. **Galileo Galilei,** Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend, nebst Anhang über den Schwerpunkt einiger fester Körper. Mit 39 Holzschnitten. Herausgegeben von Arth. von Oettingen.

» 12. **Immanuel Kant,** Theorie des Himmels. Herausgegeben von H. Ebert.

Wilhelm Engelmann.

